Algebraična in evklidska geometrija

Klemen Šivic

27. januar 2017

1. Izreki iz evklidske geometrije
   - Pascalov izrek
   - Papusov izrek

2. Algebraična geometrija
   - Algebraične krivulje
   - Projektivna ravnina
   - Presečišča krivulj
   - Bézoutov izrek in njegove posledice

Pascalov izrek

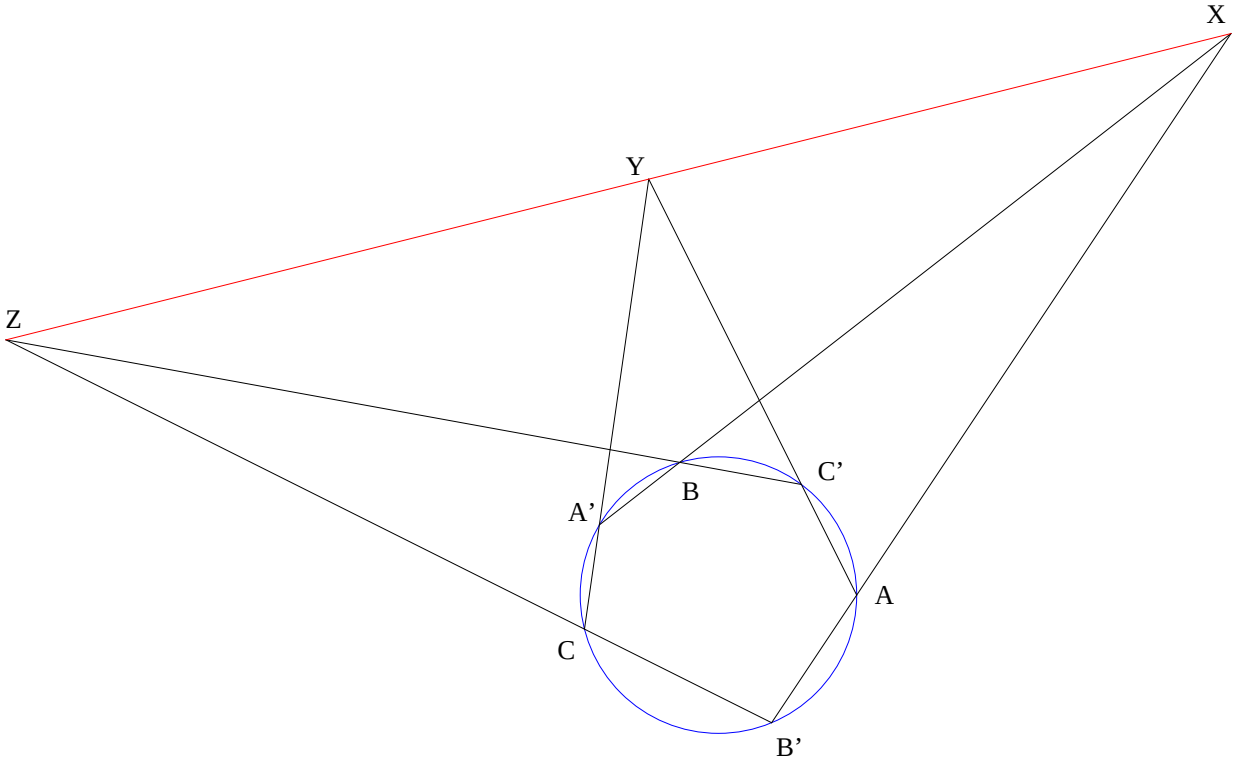
Izrek (Pascal, 1639)

Presečišča po dveh nosilk nasprotnih stranic tetivnega šestkotnika ležijo na isti premici.

Pascalov izrek

Izrek (Pascal, 1639)

Presečišča po dveh nosilk nasprotnih stranic tetivnega šestkotnika ležijo na isti premici.



Pascalov izrek II

Pascalov izrek velja tudi za tak vrstni red točk, da točke ne tvorijo šestkotnika, ampak lomljenko s samopresečišči.

Izrek (Pascal)

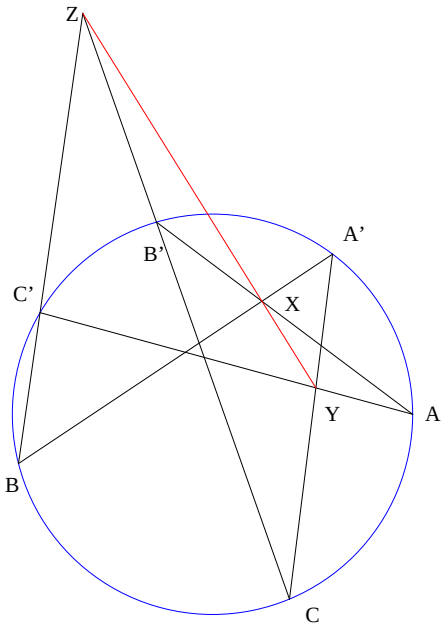
Naj bodo A, B, C, A', B', C' poljubne točke na krožnici. Potem točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ ležijo na isti premici.

Pascalov izrek II

Pascalov izrek velja tudi za tak vrstni red točk, da točke ne tvorijo šestkotnika, ampak lomljenko s samopresečišči.

Izrek (Pascal)

Naj bodo A, B, C, A', B', C' poljubne točke na krožnici. Potem točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ ležijo na isti premici.



Papusov izrek

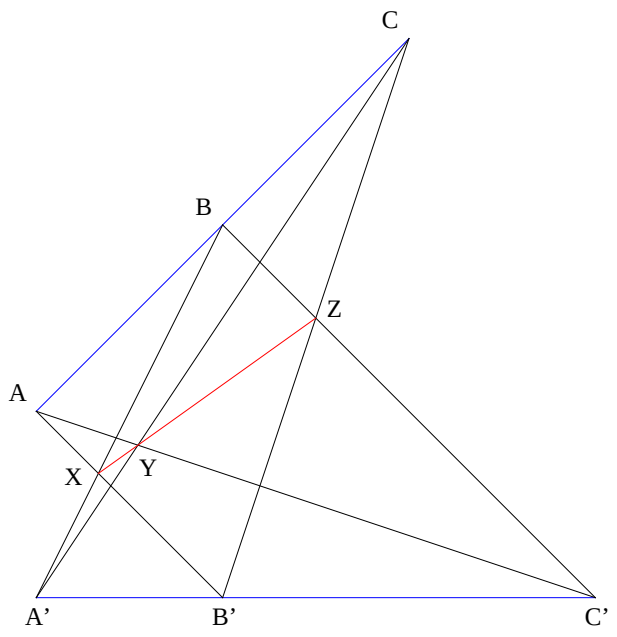
Izrek (Papus iz Aleksandrije, 340)

Naj točke A, B, C ležijo na isti premici, prav tako naj točke A', B', C' ležijo na isti premici. Potem točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ tudi ležijo na isti premici.

Papusov izrek

Izrek (Papus iz Aleksandrije, 340)

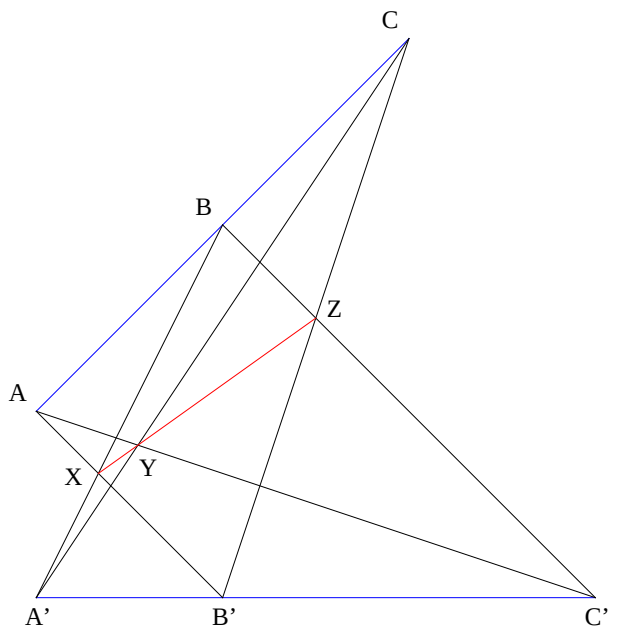
Naj točke A, B, C ležijo na isti premici, prav tako naj točke A', B', C' ležijo na isti premici. Potem točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ tudi ležijo na isti premici.



Papusov izrek

Izrek (Papus iz Aleksandrije, 340)

Naj točke A, B, C ležijo na isti premici, prav tako naj točke A', B', C' ležijo na isti premici. Potem točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ tudi ležijo na isti premici.



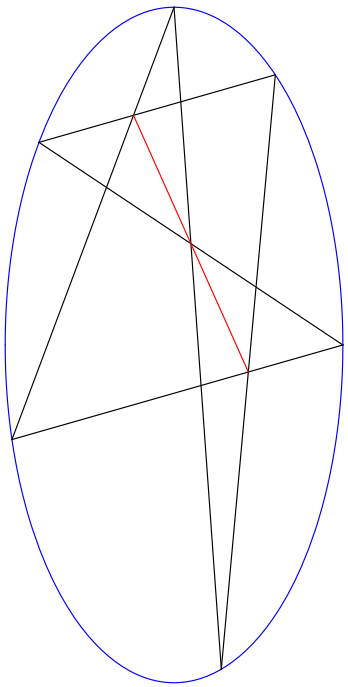
Ali sta Papusov in Pascalov izrek povezana?

Pascalov izrek III

Pascal je izrek dokazal za 6 točk na poljubni stožnici, ne le na krožnici.

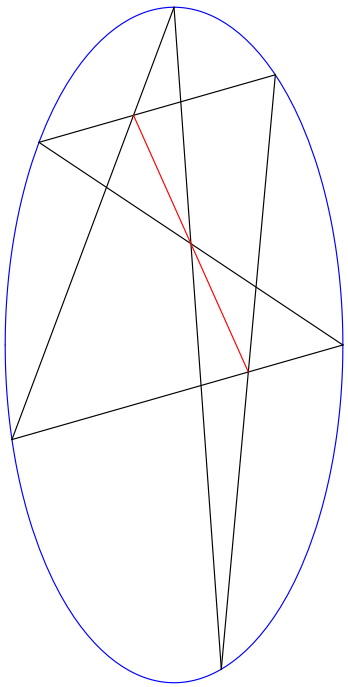
Pascalov izrek III

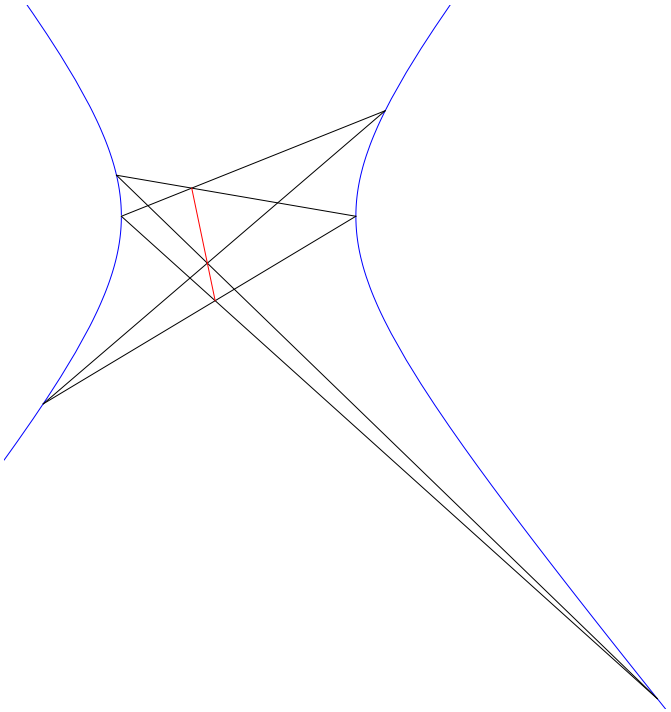
Pascal je izrek dokazal za 6 točk na poljubni stožnici, ne le na krožnici.



Pascalov izrek III

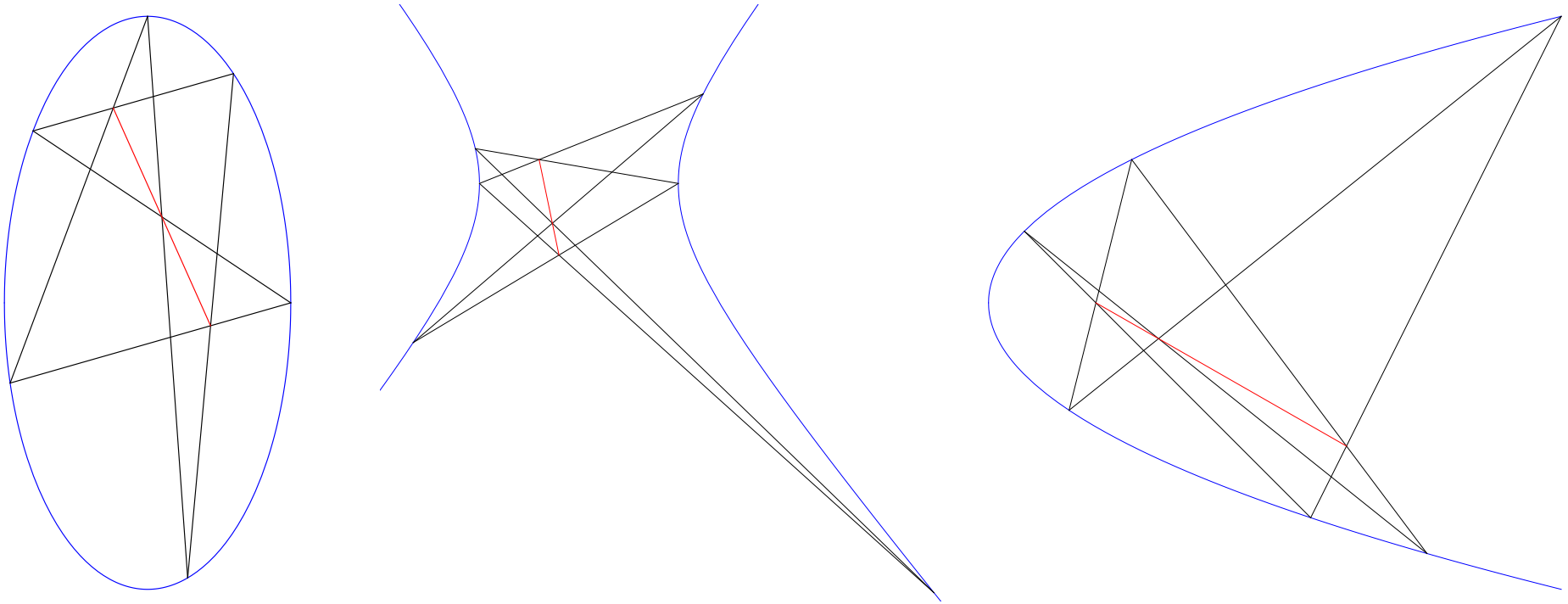
Pascal je izrek dokazal za 6 točk na poljubni stožnici, ne le na krožnici.





Pascalov izrek III

Pascal je izrek dokazal za 6 točk na poljubni stožnici, ne le na krožnici.



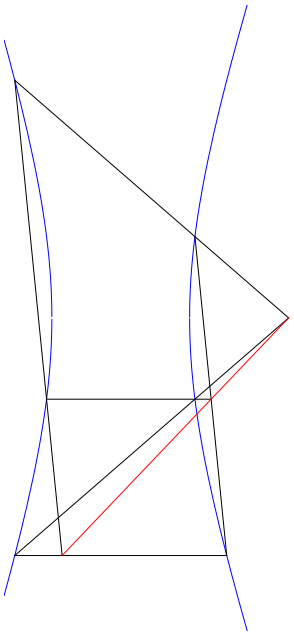
Povezava Papusovega in Pascalovega izreka

Povezava Papusovega in Pascalovega izreka

Kaj pravi Pascalov izrek za hiperbolo, ki se približuje svojima asimptotama?

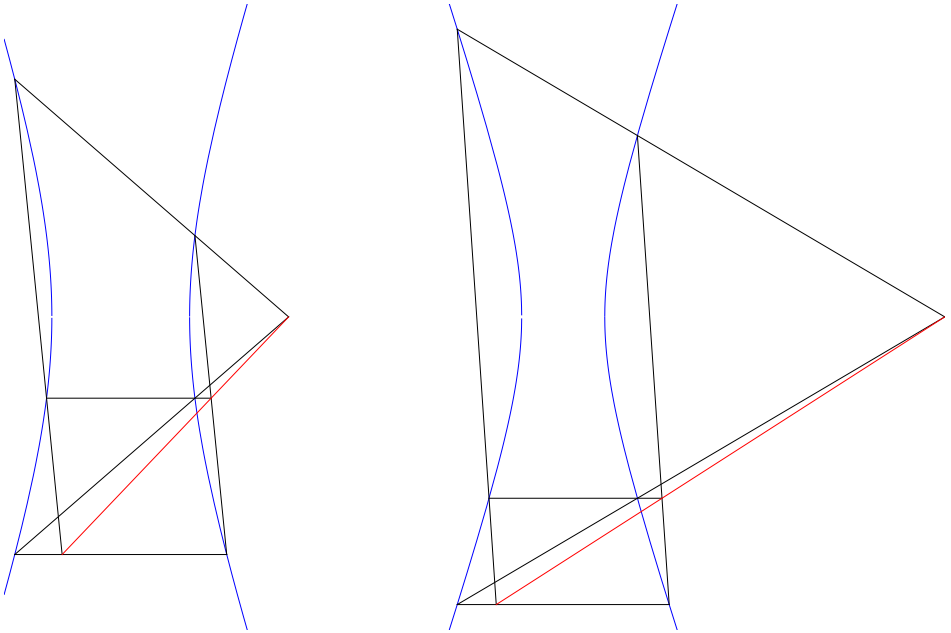
Povezava Papusovega in Pascalovega izreka

Kaj pravi Pascalov izrek za hiperbolo, ki se približuje svojima asimptotama?



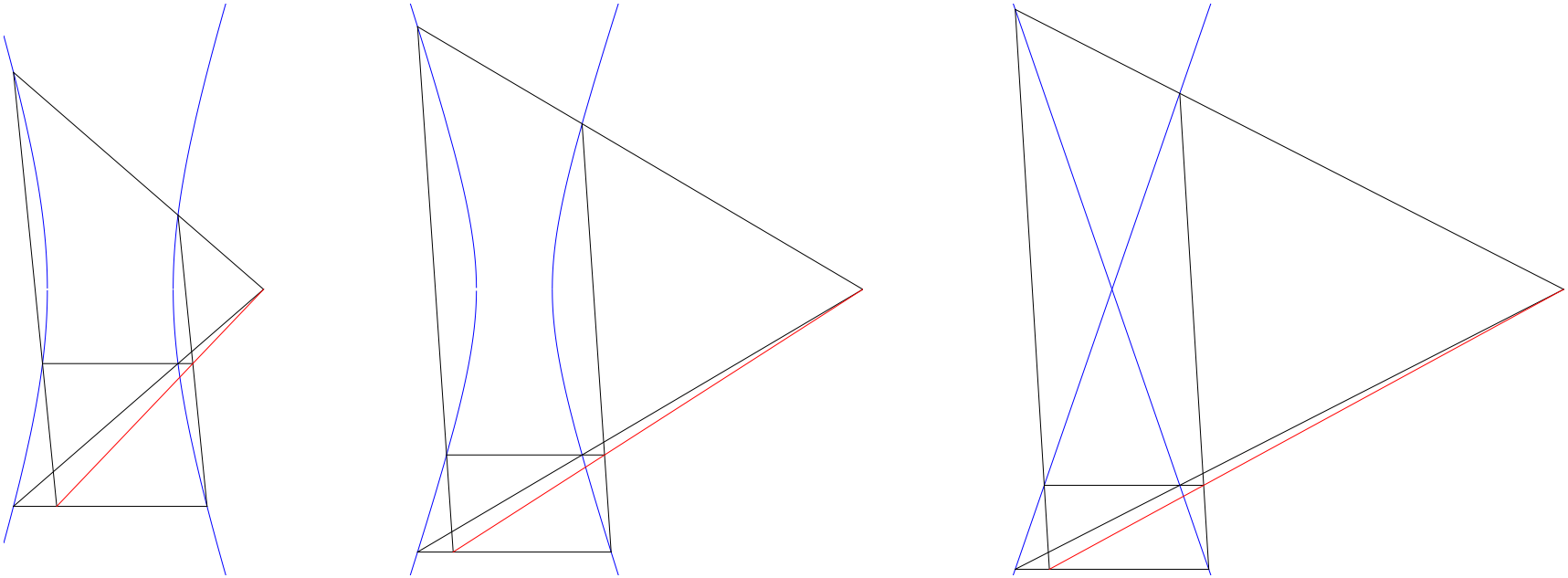
Povezava Papusovega in Pascalovega izreka

Kaj pravi Pascalov izrek za hiperbolo, ki se približuje svojima asimptotama?



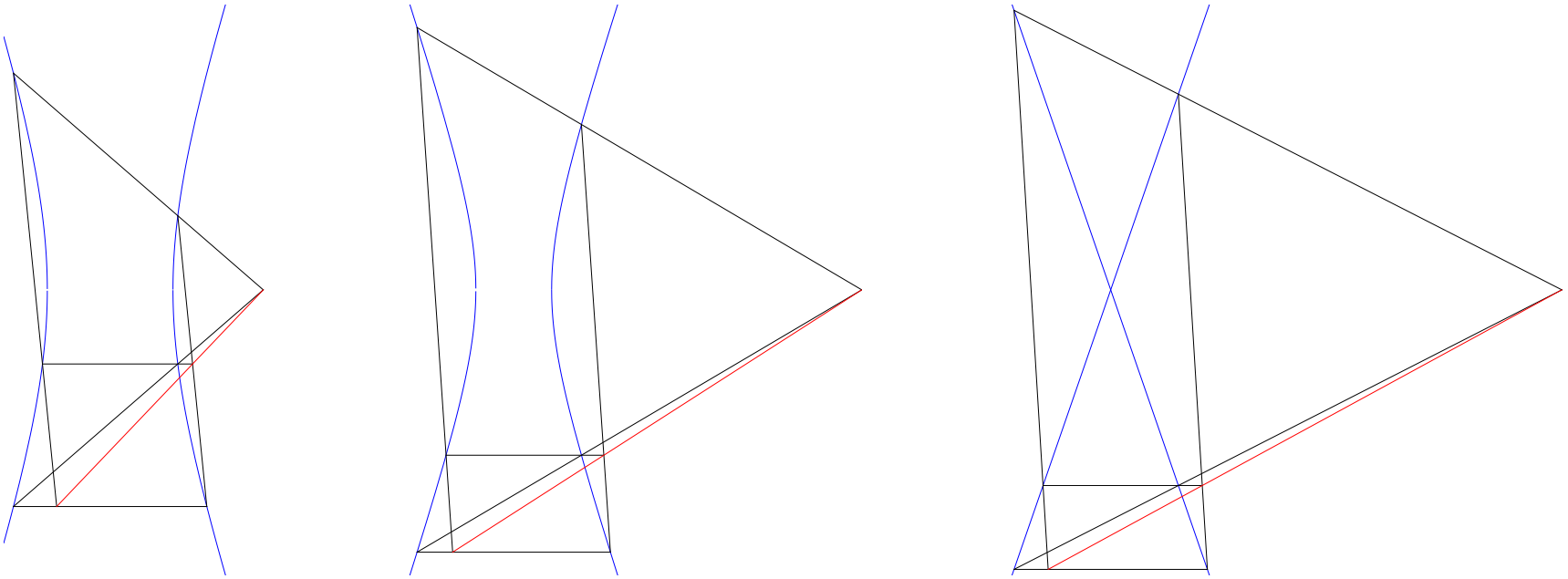
Povezava Papusovega in Pascalovega izreka

Kaj pravi Pascalov izrek za hiperbolo, ki se približuje svojima asimptotama?



Povezava Papusovega in Pascalovega izreka

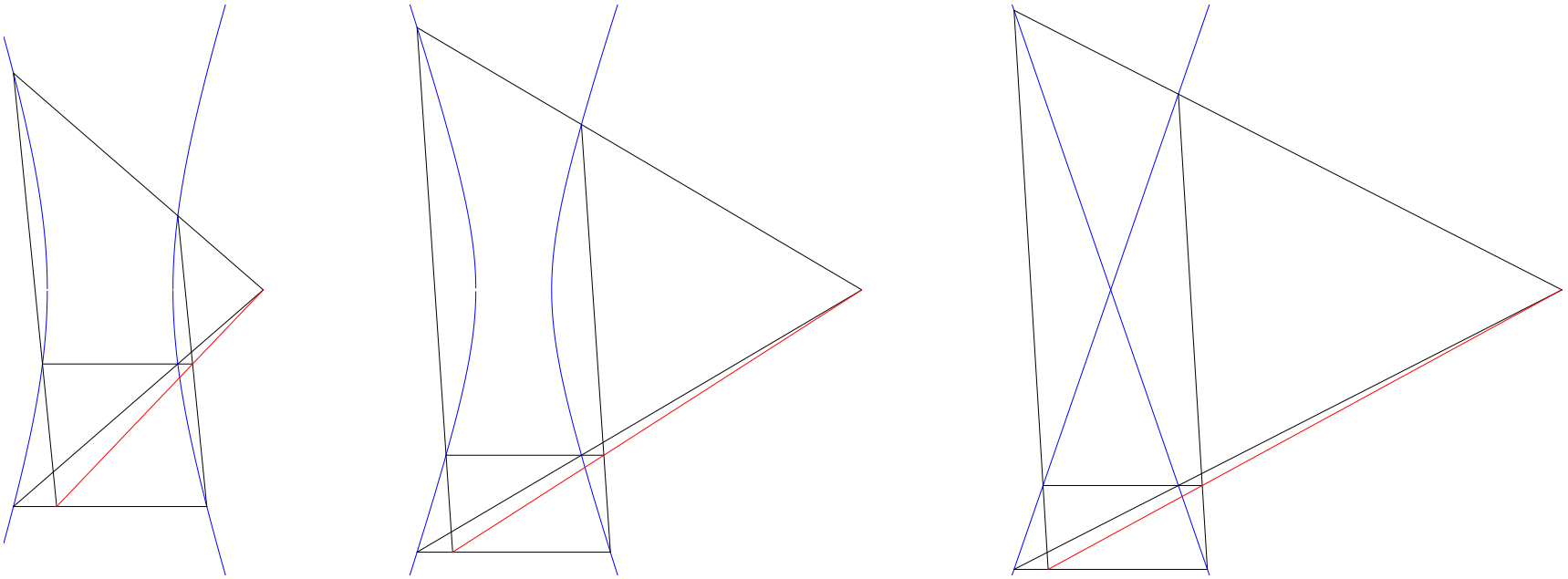
Kaj pravi Pascalov izrek za hiperbolo, ki se približuje svojima asimptotama?



V limiti dobimo Papusov izrek.

Povezava Papusovega in Pascalovega izreka

Kaj pravi Pascalov izrek za hiperbolo, ki se približuje svojima asimptotama?



V limiti dobimo Papusov izrek.

Ali tudi Pascalov izrek sledi iz splošnejšega rezultata?

Algebraične krivulje

Algebraične krivulje

Definicija

Algebraična krivulja v ravnini je taka množica $\mathcal{C}$, za katero obstaja polinom p v dveh spremenljivkah, da je

$$\mathcal{C} = \{(x, y); p(x, y) = 0\}.$$

Algebraično krivuljo, ki je množica ničel polinoma p, označimo $V(p)$.

Algebraične krivulje

Definicija

Algebraična krivulja v ravnini je taka množica $\mathcal{C}$, za katero obstaja polinom p v dveh spremenljivkah, da je

$$\mathcal{C} = \{(x, y); p(x, y) = 0\}.$$

Algebraično krivuljo, ki je množica ničel polinoma p, označimo $V(p)$.

$p(x, y) = 0 \Leftrightarrow p(x, y)^n = 0$. Običajno nas zanima polinom najmanjše stopnje, za katerega je $\mathcal{C} = V(p)$. Ta v svojem razcepu nima večkratnih faktorjev. Pravimo, da je reduciran.

Stopnja krivulje

Definicija

Polinom oblike $x^m y^n$ imenujemo monom. Njegova stopnja je enaka $m + n$. Vsak polinom v dveh spremenljivkah lahko zapišemo v obliki $\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$. Stopnja tega polinoma je enaka največji stopnji monomov v razcepu.

Stopnja krivulje

Definicija

Polinom oblike $x^m y^n$ imenujemo monom. Njegova stopnja je enaka $m+n$. Vsak polinom v dveh spremenljivkah lahko zapišemo v obliki $\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$. Stopnja tega polinoma je enaka največji stopnji monomov v razcepu.

Definicija

Če je d stopnja (reduciranega) polinoma p, pravimo, da ima krivulja $V(p)$ stopnjo d.

Stopnja krivulje

Definicija

Polinom oblike $x^m y^n$ imenujemo monom. Njegova stopnja je enaka $m+n$. Vsak polinom v dveh spremenljivkah lahko zapišemo v obliki $\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$. Stopnja tega polinoma je enaka največji stopnji monomov v razcepu.

Definicija

Če je d stopnja (reduciranega) polinoma p, pravimo, da ima krivulja $V(p)$ stopnjo d.

Primeri

- Stopnja 1: premice.
- Stopnja 2: stožnice.
- Stopnja 3: kubične krivulje.

Razcepnost

Definicija

Polinom p (v poljubno mnogo spremenljivkah) imenujemo razcepen, če obstajata polinoma q in r, da je $p = q \cdot r$.
Algebraično krivuljo $V(p)$ imenujemo razcepna, če je polinom p razcepen. Če krivulja ni razcepna, je nerazcepna.

Razcepnost

Definicija

Polinom p (v poljubno mnogo spremenljivkah) imenujemo razcepen, če obstajata polinoma q in r, da je $p = q \cdot r$.
Algebraično krivuljo $V(p)$ imenujemo razcepna, če je polinom p razcepen.
Če krivulja ni razcepna, je nerazcepna.

Kakšne so razcepne krivulje?

Razcepnost

Definicija

Polinom p (v poljubno mnogo spremenljivkah) imenujemo razcepen, če obstajata polinoma q in r, da je $p = q \cdot r$.
Algebraično krivuljo $V(p)$ imenujemo razcepna, če je polinom p razcepen. Če krivulja ni razcepna, je nerazcepna.

Kakšne so razcepne krivulje?

$V(pq) = V(p) \cup V(q)$.

Razcepnost II

Posledica

Krivulja je razcepna natanko takrat, ko je unija dveh krivulj manjših stopenj.

Razcepnost II

Posledica

Krivulja je razcepna natanko takrat, ko je unija dveh krivulj manjših stopenj.

Definicija

Vsako algebraično krivuljo lahko zapišemo v obliki $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$, *kjer so* $\mathcal{C}_i$ *nerazcepne algebraične krivulje. Imenujemo jih komponente krivulje* $\mathcal{C}$.

Povezava Papusovega in Pascalovega izreka II

Povezava Papusovega in Pascalovega izreka II

Poseben primer razcepne krivulje

2 premici sta primer razcepne stožnice.

Povezava Papusovega in Pascalovega izreka II

Poseben primer razcepne krivulje

2 premici sta primer razcepne stožnice.

Pascalov izrek (po zveznosti) velja tudi za razcepne stožnice:

Povezava Papusovega in Pascalovega izreka II

Poseben primer razcepne krivulje

2 premici sta primer razcepne stožnice.

Pascalov izrek (po zveznosti) velja tudi za razcepne stožnice:

Naj bodo A, B, C, A', B', C' poljubne točke, ki ležijo na dveh premicah (t.j. na razcepni stožnici). Potem točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ ležijo na isti premici.

Povezava Papusovega in Pascalovega izreka II

Poseben primer razcepne krivulje

2 premici sta primer razcepne stožnice.

Pascalov izrek (po zveznosti) velja tudi za razcepne stožnice:

Naj bodo A, B, C, A', B', C' poljubne točke, ki ležijo na dveh premicah (t.j. na razcepni stožnici). Potem točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ ležijo na isti premici.

To je Papusov izrek.

$\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$?

Kaj je $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 0\}$?

$\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$?

Kaj je $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 0\}$?

Kaj pa $\{(x, y) \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 = 0\}$?

$\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$?

Kaj je $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 0\}$?

Kaj pa $\{(x, y) \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 = 0\}$?

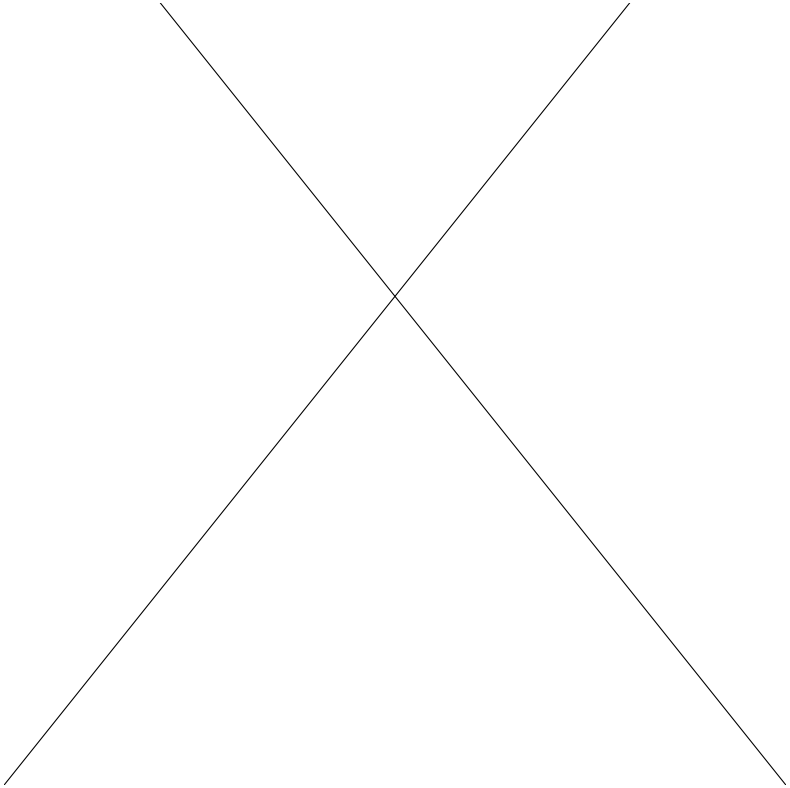
V algebraični geometriji vse delamo nad kompleksnimi števili.

Presečišča dveh premic

Koliko presečišč imata dve premici?

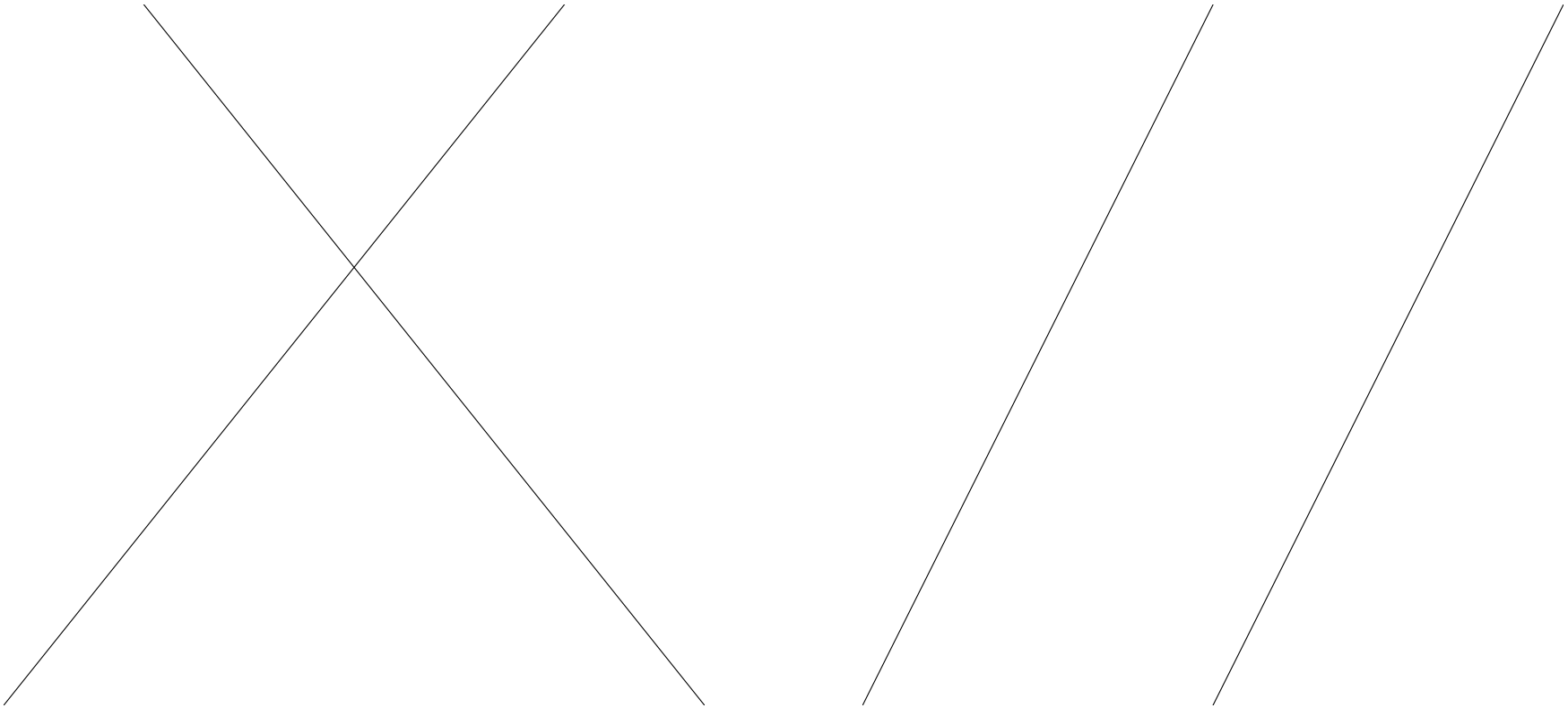
Presečišča dveh premic

Koliko presečišč imata dve premici?



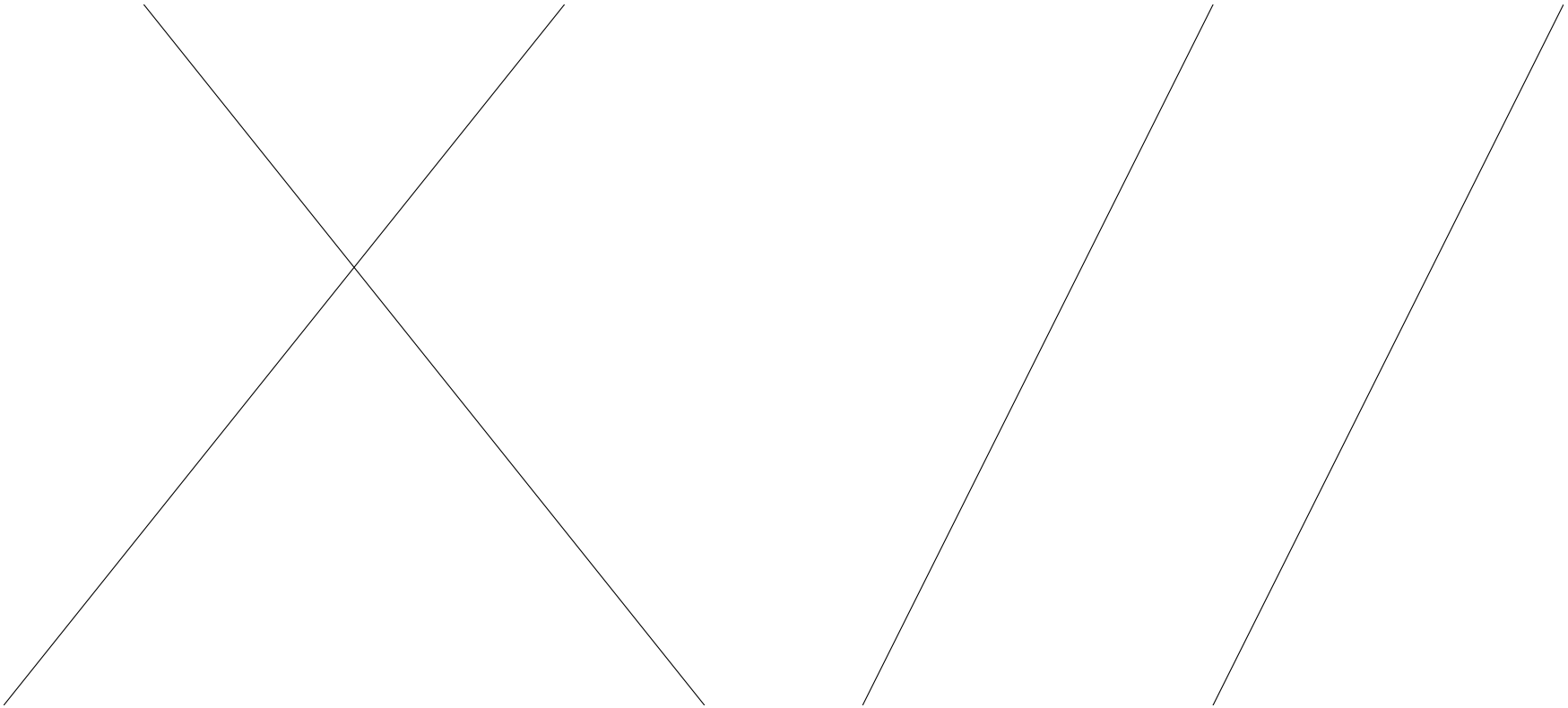
Presečišča dveh premic

Koliko presečišč imata dve premici?



Presečišča dveh premic

Koliko presečišč imata dve premici?



Ne želimo posebej obravnavati primerov, ali sta premici vzporedni ali se sekata.

Projektivna ravnina

Ideja

Želimo razširiti ravnino tako, da se bosta v razširjeni množici vsaki dve (vzporedni) premici sekali. To storimo tako, da običajni ravnini za vsako možno smer premice v ravnini dodamo eno točko v neskončnosti. Dobljena množica se imenuje projektivna ravnina.
Realno projektivno ravnino označimo $\mathbb{RP}^2$, kompleksno pa $\mathbb{CP}^2$ ali le $\mathbb{P}^2$.

Projektivna ravnina

Ideja

Želimo razširiti ravnino tako, da se bosta v razširjeni množici vsaki dve (vzporedni) premici sekali. To storimo tako, da običajni ravnini za vsako možno smer premice v ravnini dodamo eno točko v neskončnosti. Dobljena množica se imenuje projektivna ravnina.
Realno projektivno ravnino označimo $\mathbb{RP}^2$, kompleksno pa $\mathbb{CP}^2$ ali le $\mathbb{P}^2$.

Projektivno ravnino dobimo tako, da običajni ravnini dodamo projektivno premico v neskončnosti. Projektivna premica je običajna premica z dodanim elementom v neskončnosti.

Projektivna ravnina

Ideja

Želimo razširiti ravnino tako, da se bosta v razširjeni množici vsaki dve (vzporedni) premici sekali. To storimo tako, da običajni ravnini za vsako možno smer premice v ravnini dodamo eno točko v neskončnosti. Dobljena množica se imenuje projektivna ravnina.
Realno projektivno ravnino označimo $\mathbb{RP}^2$, kompleksno pa $\mathbb{CP}^2$ ali le $\mathbb{P}^2$.

Projektivno ravnino dobimo tako, da običajni ravnini dodamo projektivno premico v neskončnosti. Projektivna premica je običajna premica z dodanim elementom v neskončnosti.

Kako računamo s točkami projektivne ravnine? Potrebujemo natančnejšo definicijo.

Projektivna ravnina II

Opis projektivne ravnine

- Ravnino vložimo v 3-razsežni prostor, tako da vsako točko (x, y) preslikamo v $(x, y, 1)$.

Projektivna ravnina II

Opis projektivne ravnine

- Ravnino vložimo v 3-razsežni prostor, tako da vsako točko (x, y) preslikamo v $(x, y, 1)$.
- Točke ravnine $z = 1$ so v bijekciji s premicami v prostoru, ki grejo skozi izhodišče in ne ležijo na ravnini $z = 0$.

Projektivna ravnina II

Opis projektivne ravnine

- Ravnino vložimo v 3-razsežni prostor, tako da vsako točko (x, y) preslikamo v $(x, y, 1)$.
- Točke ravnine $z = 1$ so v bijekciji s premicami v prostoru, ki grejo skozi izhodišče in ne ležijo na ravnini $z = 0$.
- Premice na ravnini $z = 1$ so v bijekciji z ravninami v prostoru, različnimi od $z = 0$, ki grejo skozi koordinatno izhodišče. Presečišče vsake take ravnine in ravnine $z = 0$ pa je premica.

Projektivna ravnina II

Opis projektivne ravnine

- Ravnino vložimo v 3-razsežni prostor, tako da vsako točko (x, y) preslikamo v $(x, y, 1)$.
- Točke ravnine $z = 1$ so v bijekciji s premicami v prostoru, ki grejo skozi izhodišče in ne ležijo na ravnini $z = 0$.
- Premice na ravnini $z = 1$ so v bijekciji z ravninami v prostoru, različnimi od $z = 0$, ki grejo skozi koordinatno izhodišče. Presečišče vsake take ravnine in ravnine $z = 0$ pa je premica.
- Če sta p in q vzporedni premici na ravnini $z = 1$ ter Σ in Π ravnini, ki vsebujeta 0 in p oziroma 0 in q, potem sta presečišči ravnin Σ in Π z ravnino $z = 0$ enaki. Premice v ravnini $z = 0$ torej lahko identificiramo s točkami v neskončnosti.

Projektivna ravnina III

Definicija

Točke projektivne ravnine so vse premice v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.

Projektivna ravnina III

Definicija

Točke projektivne ravnine so vse premice v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.
Premice projektivne ravnine so vse ravnine v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.

Projektivna ravnina III

Definicija

Točke projektivne ravnine so vse premice v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.
Premice projektivne ravnine so vse ravnine v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.

Točke projektivne ravnine lahko opišemo s trojicami $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, kjer trojici (x, y, z) in (x', y', z') pa predstavljata isto točko projektivne ravnine, če obstaja število $\lambda \neq 0$, da je $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ in $z' = \lambda z$.

Projektivna ravnina III

Definicija

Točke projektivne ravnine so vse premice v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.
Premice projektivne ravnine so vse ravnine v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.

Točke projektivne ravnine lahko opišemo s trojicami $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, kjer trojici (x, y, z) in (x', y', z') pa predstavljata isto točko projektivne ravnine, če obstaja število $\lambda \neq 0$, da je $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ in $z' = \lambda z$.

Točke $(x, y, 1)$ (oziroma (x, y, z), kjer $z \neq 0$) predstavljajo točke običajne ravnine, točke $(x, y, 0)$ pa točke v neskončnosti.

Projektivna ravnina III

Definicija

Točke projektivne ravnine so vse premice v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.
Premice projektivne ravnine so vse ravnine v 3-razsežnem prostoru, ki potekajo skozi izhodišče.

Točke projektivne ravnine lahko opišemo s trojicami $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, kjer trojici (x, y, z) in (x', y', z') pa predstavljata isto točko projektivne ravnine, če obstaja število $\lambda \neq 0$, da je $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ in $z' = \lambda z$.

Točke $(x, y, 1)$ (oziroma (x, y, z), kjer $z \neq 0$) predstavljajo točke običajne ravnine, točke $(x, y, 0)$ pa točke v neskončnosti.

Premice v projektivni ravnini imajo enačbe $ax + by + cz = 0$. Vsaki dve premici v projektivni ravnini se sekata v natanko eni točki.

Papusov in Pascalov izrek v projektivnem

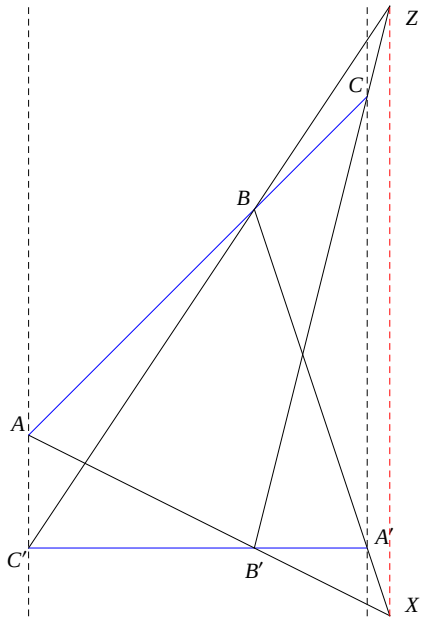
Papusov in Pascalov izrek nista bila dobro formulirana, saj se npr. premici AB' in $A'B$ lahko ne sekata!

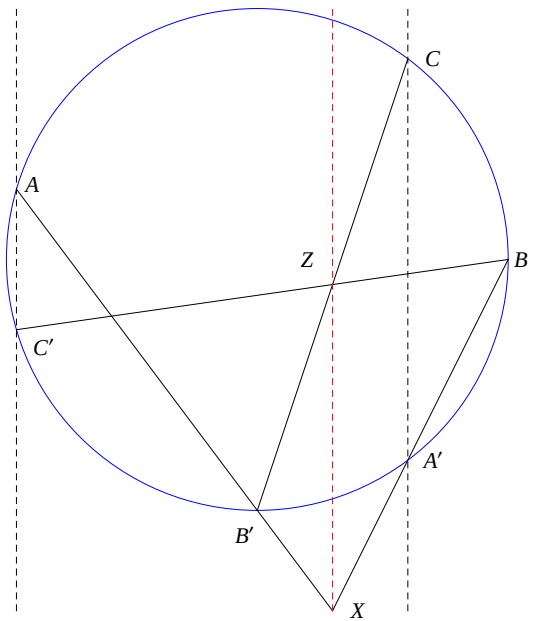
Oba izreka veljata v projektivni ravnini.

Papusov in Pascalov izrek v projektivnem

Papusov in Pascalov izrek nista bila dobro formulirana, saj se npr. premici AB' in $A'B$ lahko ne sekata!

Oba izreka veljata v projektivni ravnini.





Premice AC', $A'C$ in XZ se sekajo v točki Y, ki leži v neskončnosti.

Projektivne krivulje

Za homogene koordinate (x, y, z) točke iz projektivne ravnine izraz $p(x, y, z)$ nima pomena, saj je $(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Projektivne krivulje

Za homogene koordinate (x, y, z) točke iz projektivne ravnine izraz $p(x, y, z)$ nima pomena, saj je $(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Definicija

Polinom je homogen, če imajo vsi njegovi monomi isto stopnjo.

Projektivne krivulje

Za homogene koordinate (x, y, z) točke iz projektivne ravnine izraz $p(x, y, z)$ nima pomena, saj je $(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Definicija

Polinom je homogen, če imajo vsi njegovi monomi isto stopnjo.

Za homogen polinom p velja: $p(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$.

Projektivne krivulje

Za homogene koordinate (x, y, z) točke iz projektivne ravnine izraz $p(x, y, z)$ nima pomena, saj je $(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Definicija

Polinom je homogen, če imajo vsi njegovi monomi isto stopnjo.

Za homogen polinom p velja: $p(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$.

Definicija

Projektivna algebraična krivulja v je taka množica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, za katero obstaja homogen polinom p v treh spremenljivkah, da je

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{P}^2; p(x, y, z) = 0\}.$$

Oznaka za projektivno krivuljo, definirano s (homogenim) polinomom p, je prav tako $V(p)$.

Projektivne krivulje II

Kako iz danega polinoma dveh spremenljivk dobimo homogen polinom treh spremenljivk?

Projektivne krivulje II

Kako iz danega polinoma dveh spremenljivk dobimo homogen polinom treh spremenljivk?

Naj bo p polinom stopnje d v x in y. Vsak njegov monom pomnožimo z tako potenco z-ja, da dobimo monom stopnje d. Dobljeni polinom $P(x, y, z)$ je homogen in velja $P(x, y, 1) = p(x, y)$.

Projektivne krivulje II

Kako iz danega polinoma dveh spremenljivk dobimo homogen polinom treh spremenljivk?

Naj bo p polinom stopnje d v x in y. Vsak njegov monom pomnožimo z tako potenco z-ja, da dobimo monom stopnje d. Dobljeni polinom $P(x, y, z)$ je homogen in velja $P(x, y, 1) = p(x, y)$.

Primer

Naj bo $\mathcal{C}$ eliptična krivulja z enačbo $y^2 - x^3 + x = 0$.

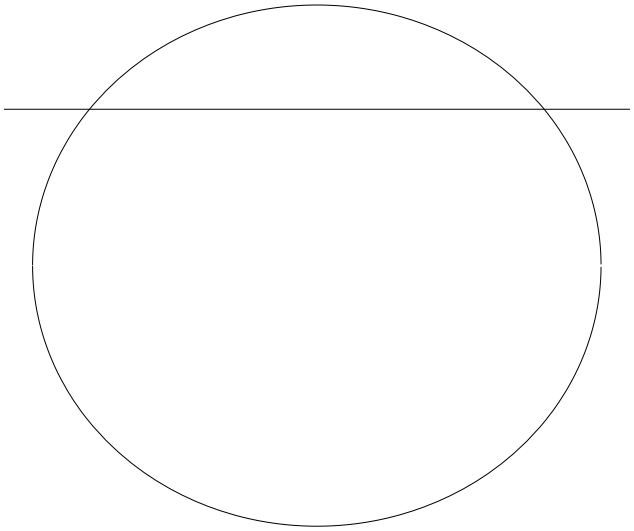
- Temu polinomu prirejen homogen polinom je $y^2z - x^3 + xz^2$.
- Pripadajoča projektivna krivulja se od krivulje $\mathcal{C}$ razlikuje le v točkah v neskončnosti. Koliko je takih točk?

Presečišča premice in krožnice

Koliko presečišč imata krožnica in premica?

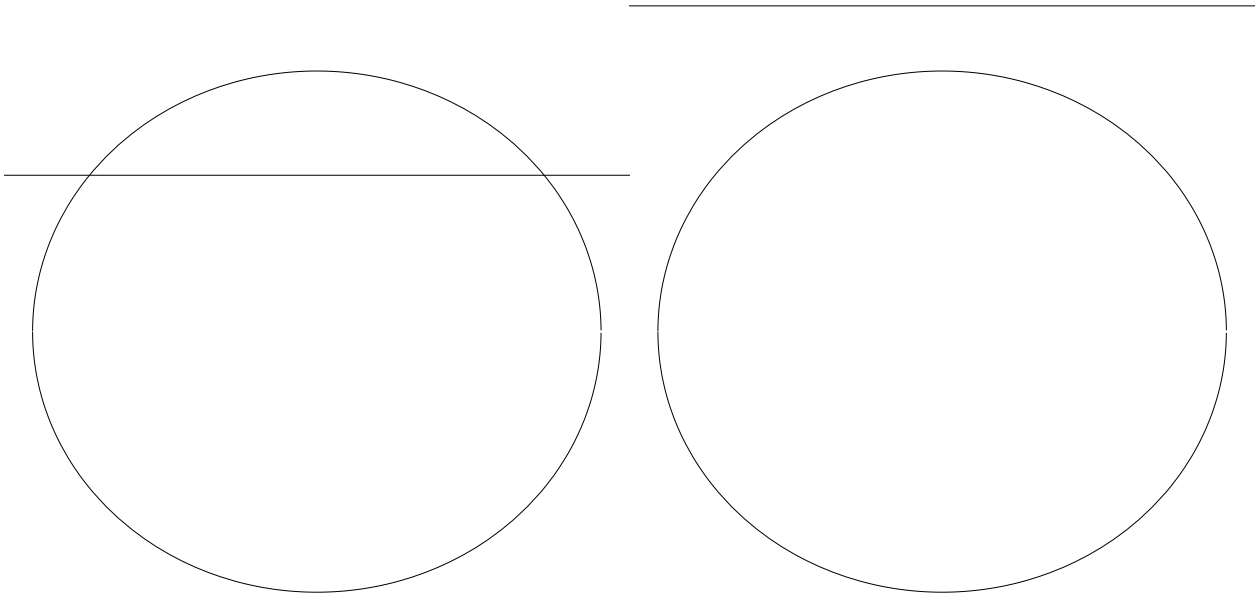
Presečišča premice in krožnice

Koliko presečišč imata krožnica in premica?



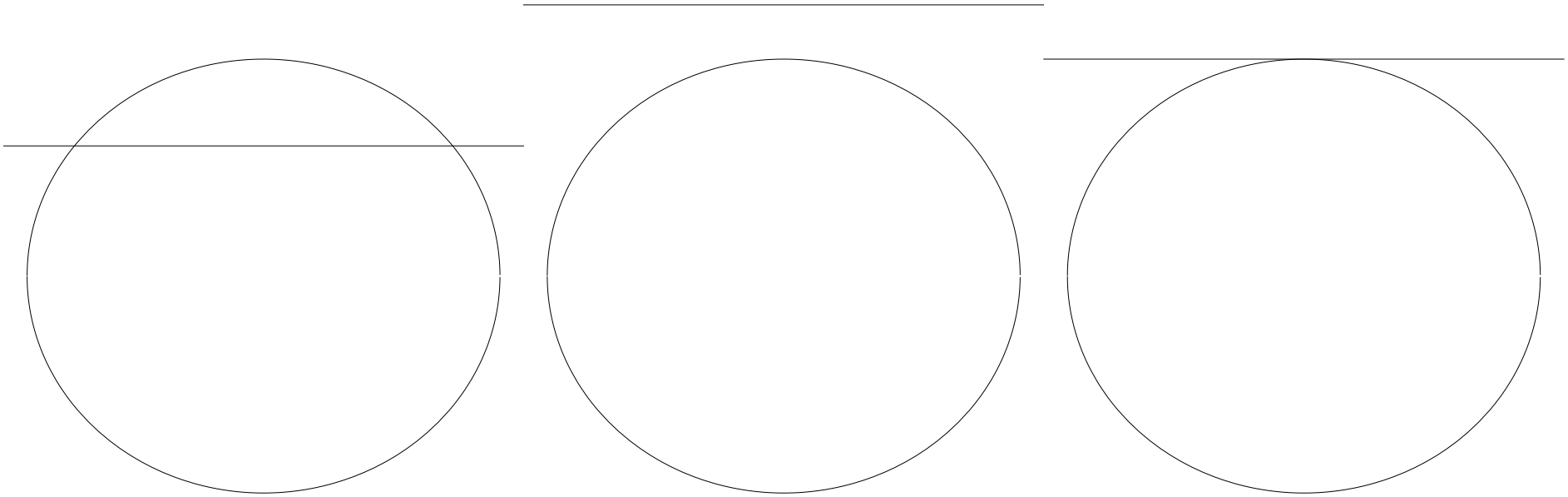
Presečišča premice in krožnice

Koliko presečišč imata krožnica in premica?



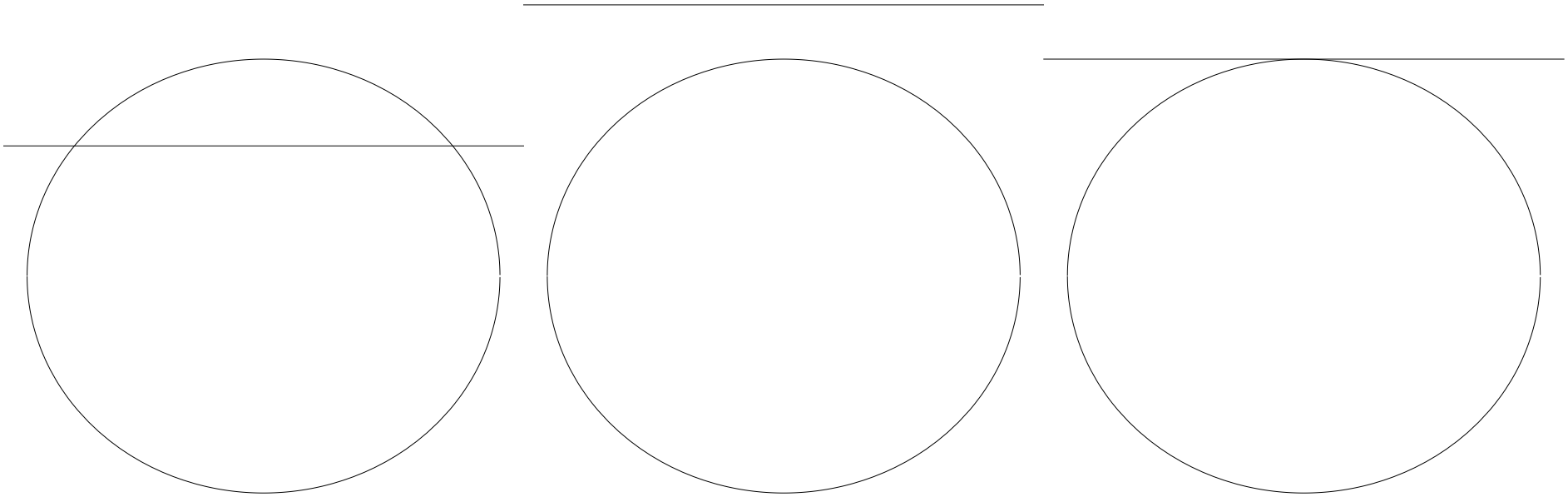
Presečišča premice in krožnice

Koliko presečišč imata krožnica in premica?



Presečišča premice in krožnice

Koliko presečišč imata krožnica in premica?



V primeru tangente običajno rečemo, da je presečišče dvojna točka.

Presečno število krivulje in premice

V ravnini imamo algebraično krivuljo $\mathcal{C}$ in taka premico p, ki ni komponenta $\mathcal{C}$, da se krivulja in premica sekata v točki $T(a, b)$. Presečno število premice in krivulje v točki T pove, "kolikokratno presečišče" je T, zato mu včasih rečemo tudi večkratnost presečišča. Dobimo ga na naslednji način:

Presečno število krivulje in premice

V ravnini imamo algebraično krivuljo $\mathcal{C}$ in taka premico p, ki ni komponenta $\mathcal{C}$, da se krivulja in premica sekata v točki $T(a, b)$. Presečno število premice in krivulje v točki T pove, "kolikokratno presečišče" je T, zato mu včasih rečemo tudi večkratnost presečišča. Dobimo ga na naslednji način:

- Iz enačbe premice izrazimo y (ali x) in ga vstavimo v enačbo krivulje. Dobimo polinom v eni spremenljivki. Ena njegova ničla je a (oziroma b).

Presečno število krivulje in premice

V ravnini imamo algebraično krivuljo $\mathcal{C}$ in taka premico p, ki ni komponenta $\mathcal{C}$, da se krivulja in premica sekata v točki $T(a, b)$. Presečno število premice in krivulje v točki T pove, "kolikokratno presečišče" je T, zato mu včasih rečemo tudi večkratnost presečišča. Dobimo ga na naslednji način:

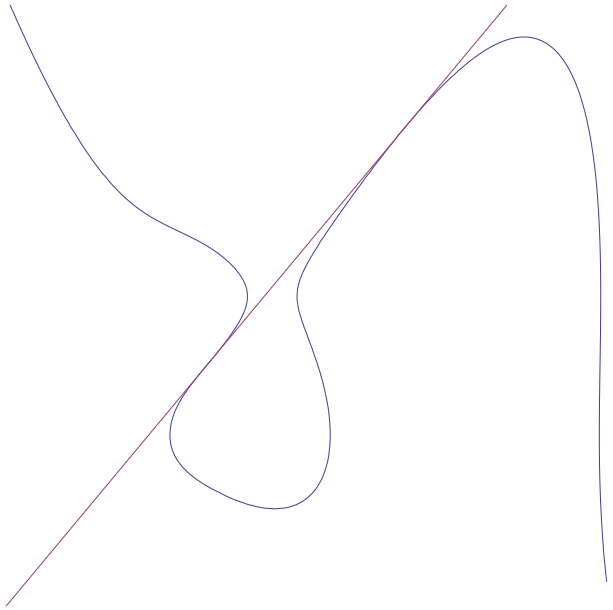
- Iz enačbe premice izrazimo y (ali x) in ga vstavimo v enačbo krivulje. Dobimo polinom v eni spremenljivki. Ena njegova ničla je a (oziroma b).
- Dobljeni polinom lahko razstavimo (nad $\mathbb{C}$!). Ker je a (oziroma b) njegova ničla, je en faktor oblike $(x - a)^n$ (oziroma $(y - b)^n$). Število n je presečno število krivulje $\mathcal{C}$ in premice p v točki T.

Primer

Presečišča krivulje $y - y^3 = x - x^4 + \frac{x^5}{4}$ in premice $y = x$:

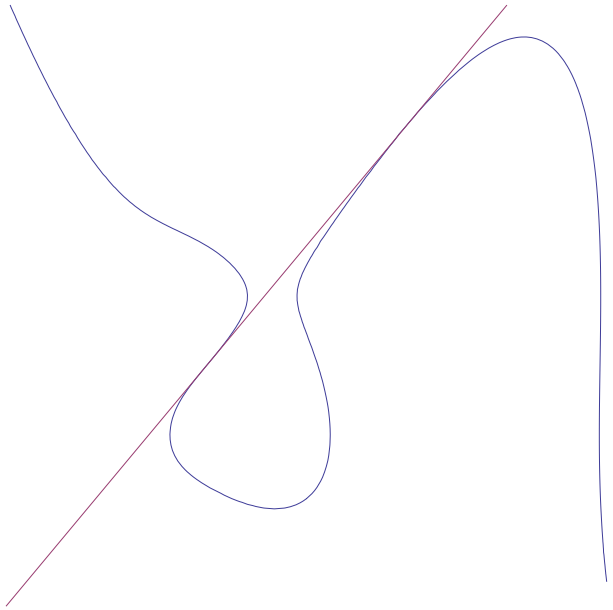
Primer

Presečišča krivulje $y - y^3 = x - x^4 + \frac{x^5}{4}$ in premice $y = x$:



Primer

Presečišča krivulje $y - y^3 = x - x^4 + \frac{x^5}{4}$ in premice $y = x$:



Iz enačbe $y = x$ izrazimo y in ga vstavimo v enačbo krivulje. Preuredimo in dobimo $x^3(x-2)^2 = 0$. Presečišči sta $(0,0)$ z večkratnostjo 3 in $(2,2)$ z večkratnostjo 2.

Presečno število dveh krivulj

Definicija

Za vsako točko T projektivne ravnine ter projektivni krivulji $\mathcal{C}_1 = V(p)$ in $\mathcal{C}_2 = V(q)$ naj bo $I(T, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ število z naslednjimi lastnostmi:

- *Če T leži na skupni komponenti krivulj $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$, je $I(T, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ neskončno, sicer pa je nenegativno celo število.*
- *$I(T, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) > 0$ natanko takrat, ko T leži na obeh krivuljah.*
- *Število $I(T, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ se ne spremeni pri spremembi koordinat.*
- *$I(T, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = I(T, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$.*
- *Če sta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ premici, je $I(T, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = 1$.*
- *$I(T, V(p), V(qr)) = I(T, V(p), V(q)) + I(T, V(p), V(r))$.*
- *$I(T, V(p + qr), V(q)) = I(T, V(p), V(q))$ za vsak polinom r.*

Število $I(T, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ se imenuje presečno število (ali presečna večkratnost) krivulj $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ v točki T.

Presečno število II

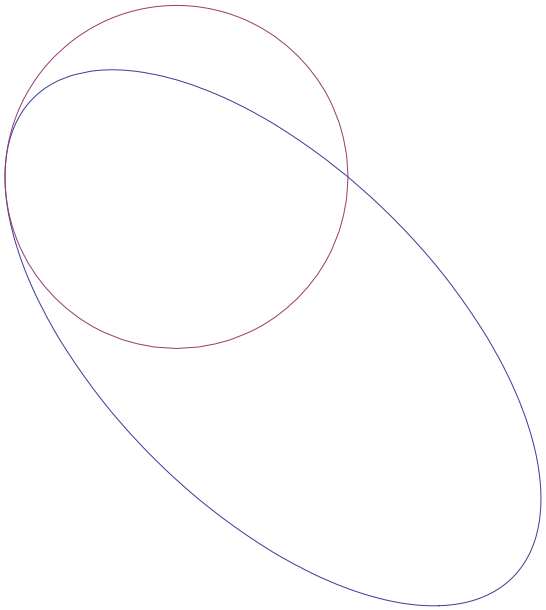
Da se pokazati, da se da presečno število definirati na enoličen način in je posplošitev presečnega števila krivulje in premice.

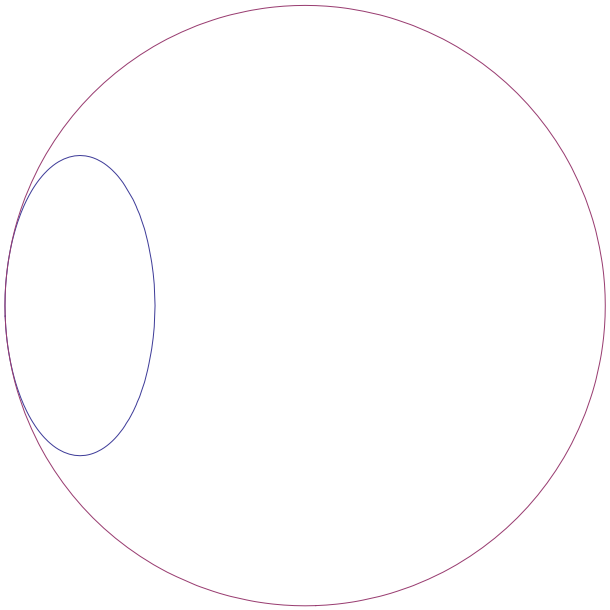
Presečno število je 1 natanko takrat, ko nobena izmed krivulj v opazovani točki ni singularna (v tej točki nima razvejišč, osti,...) in krivulji nimata skupne tangente v tej točki.

Obstaja enostaven algoritem za izračun presečnega števila, ki ga ne bomo obravnavali.

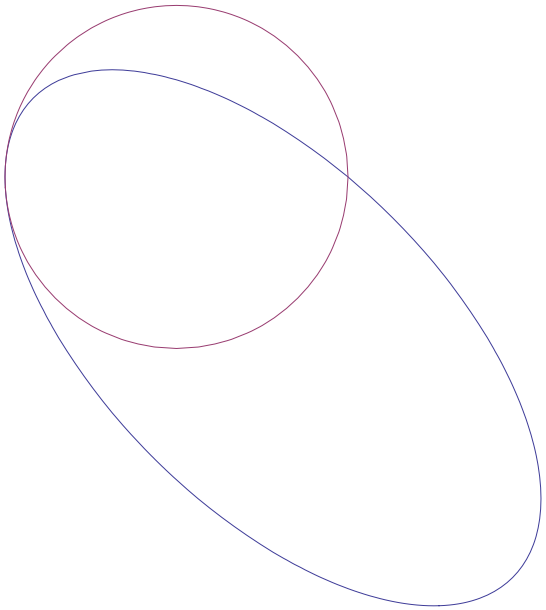
Pri majhnih stopnjah presečno število lahko izračunamo le s pomočjo lastnosti iz definicije.

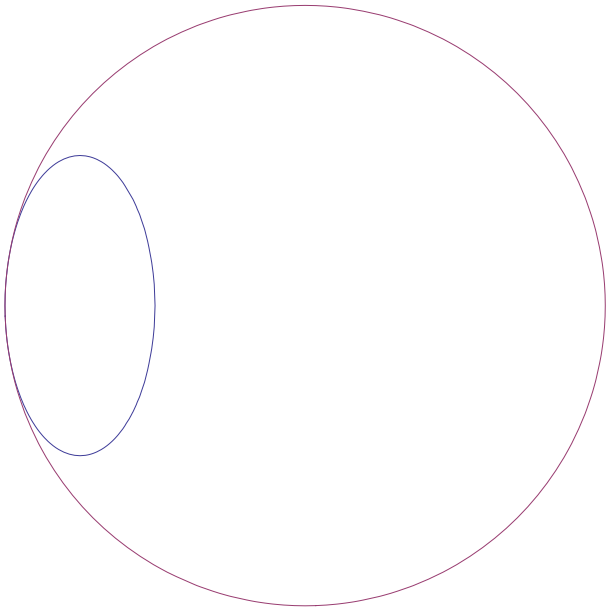
Primera presečnega števila





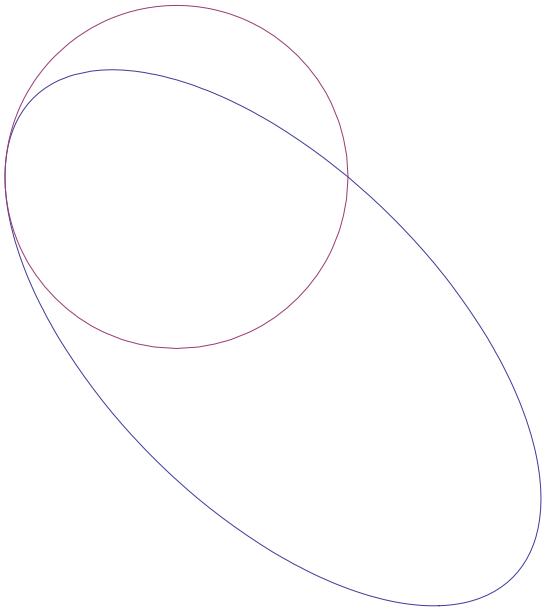
Primera presečnega števila

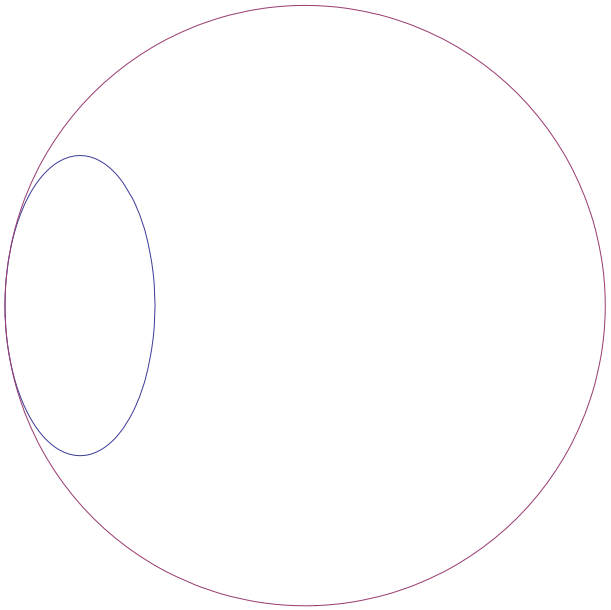




Krivulji na levi sliki sta krožnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$ in elipsa $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 6y - 5 = 0$.

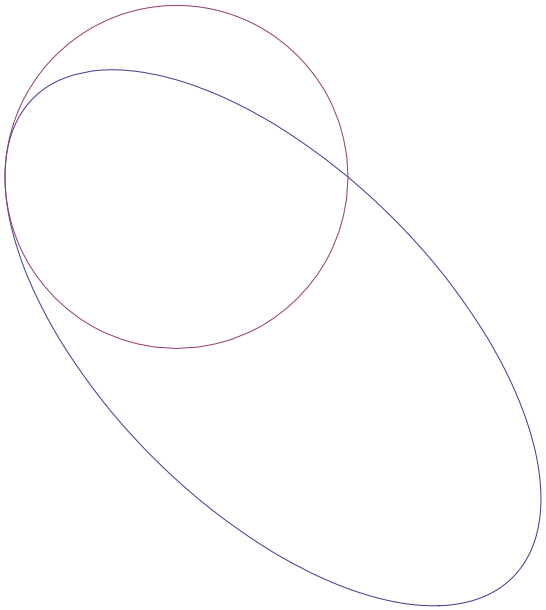
Primera presečnega števila

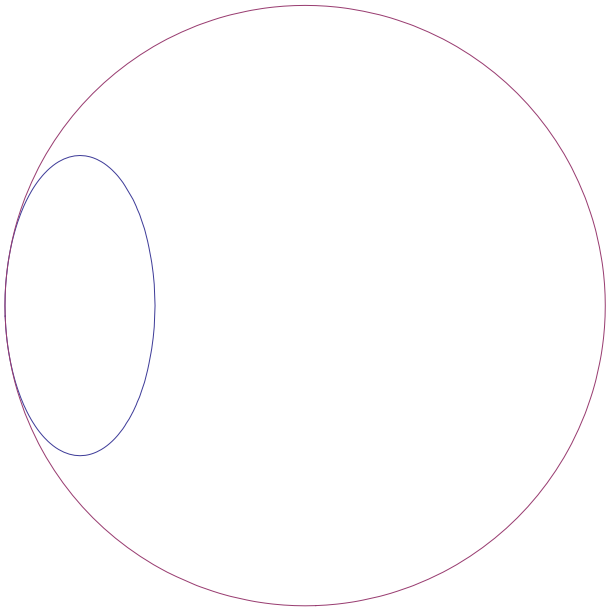




Krivulji na levi sliki sta krožnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$ in elipsa $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 6y - 5 = 0$.Eno od presečišč je $(1, 0)$ in tam nimata skupne tangente, zato je presečno število v $(1, 0)$ enako 1.

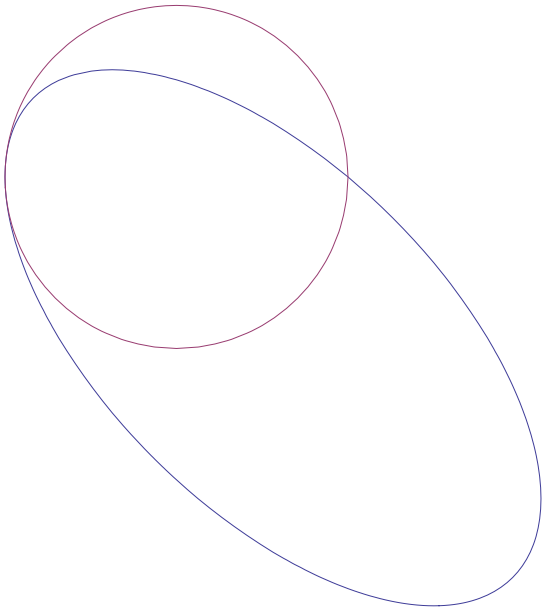
Primera presečnega števila

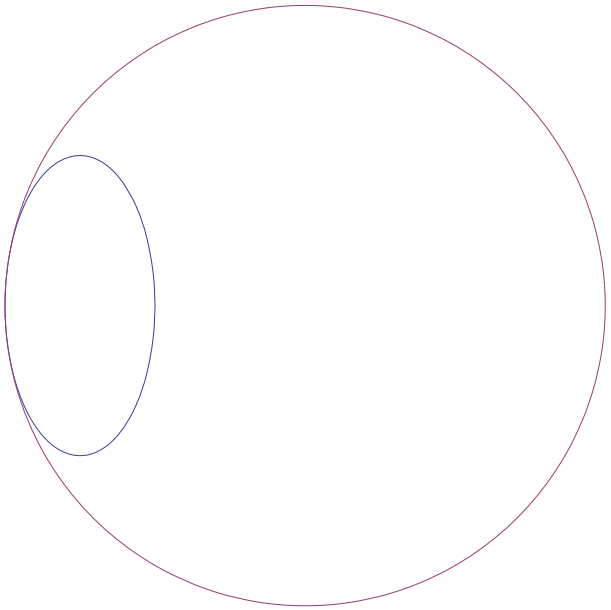




Krivulji na levi sliki sta krožnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$ in elipsa $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 6y - 5 = 0$.Eno od presečišč je $(1, 0)$ in tam nimata skupne tangente, zato je presečno število v $(1, 0)$ enako 1.Presečno število v $(-1, 0)$ je 3.

Primera presečnega števila

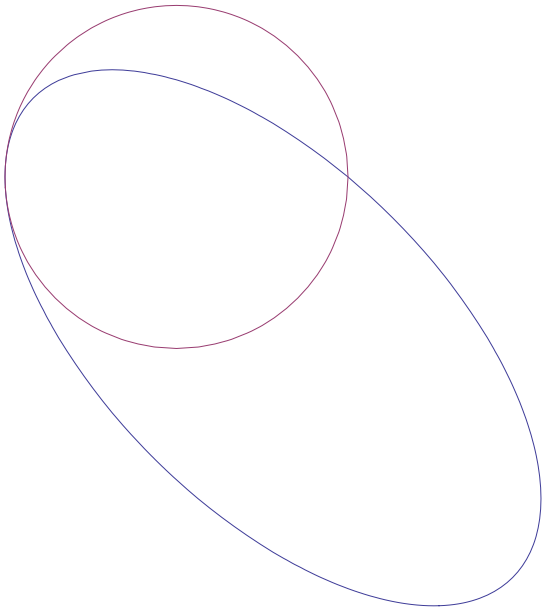


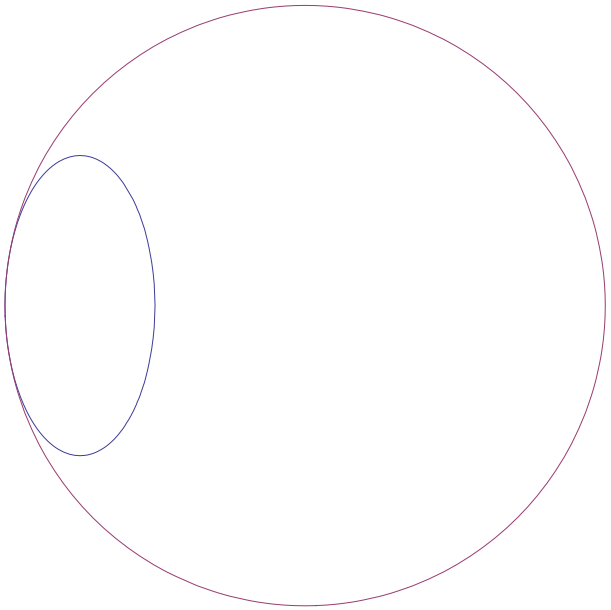


Krivulji na levi sliki sta krožnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$ in elipsa $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 6y - 5 = 0$.Eno od presečišč je $(1, 0)$ in tam nimata skupne tangente, zato je presečno število v $(1, 0)$ enako 1.Presečno število v $(-1, 0)$ je 3.

Krivulji na desni sliki sta krožnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$ in elipsa $4x^2 + y^2 + 6x + 2 = 0$.

Primera presečnega števila





Krivulji na levi sliki sta krožnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$ in elipsa $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 6y - 5 = 0$.Eno od presečišč je $(1, 0)$ in tam nimata skupne tangente, zato je presečno število v $(1, 0)$ enako 1.Presečno število v $(-1, 0)$ je 3.

Krivulji na desni sliki sta krožnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$ in elipsa $4x^2 + y^2 + 6x + 2 = 0$.Sekata se v $(-1, 0)$ in presečno število je 4.

Bézoutov izrek

Izrek (Bézout, 1779; Newton, 1687)

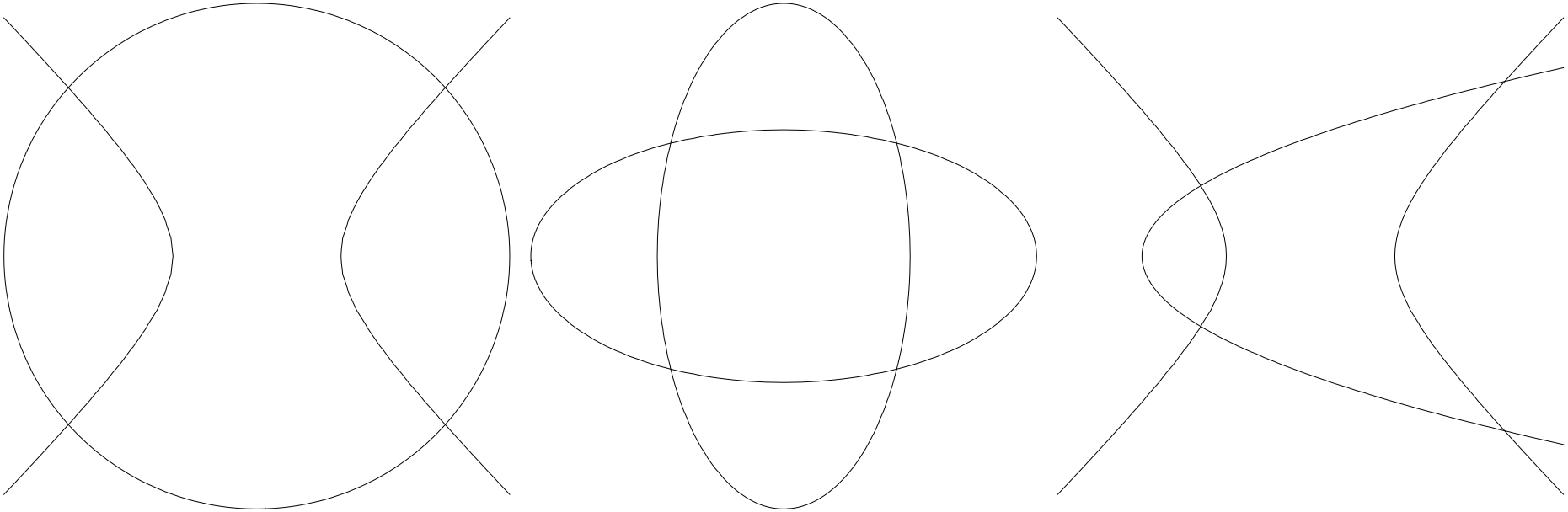
Projektivni krivulji stopenj m in n v $\mathbb{P}^2$, ki nimata skupne komponente, se sekata v mn točkah, šteto z večkratnostmi.

Primer I

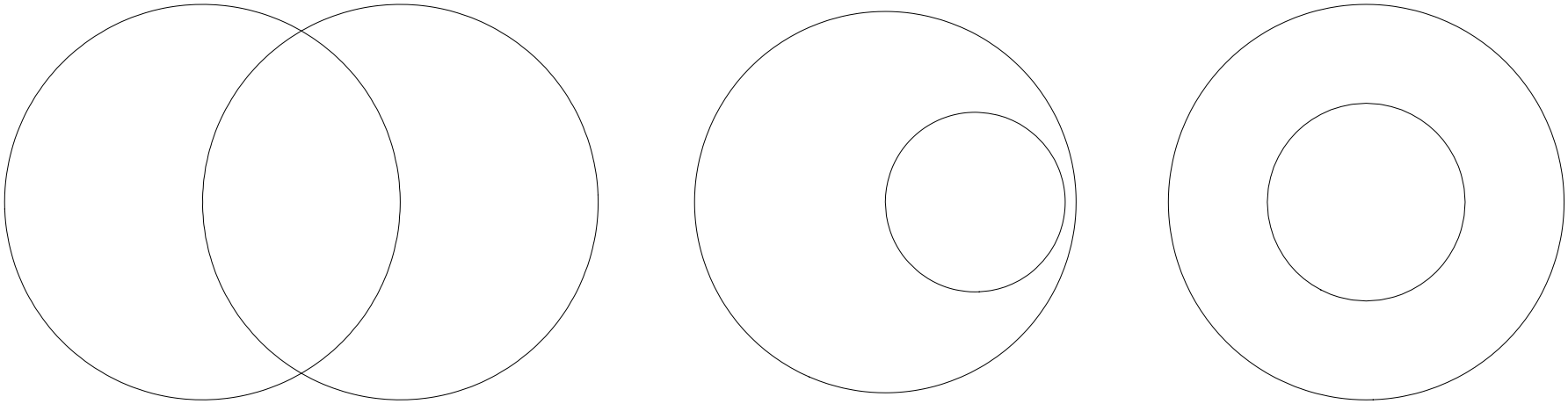
Dve stožnici se sekata v 4 točkah.

Primer I

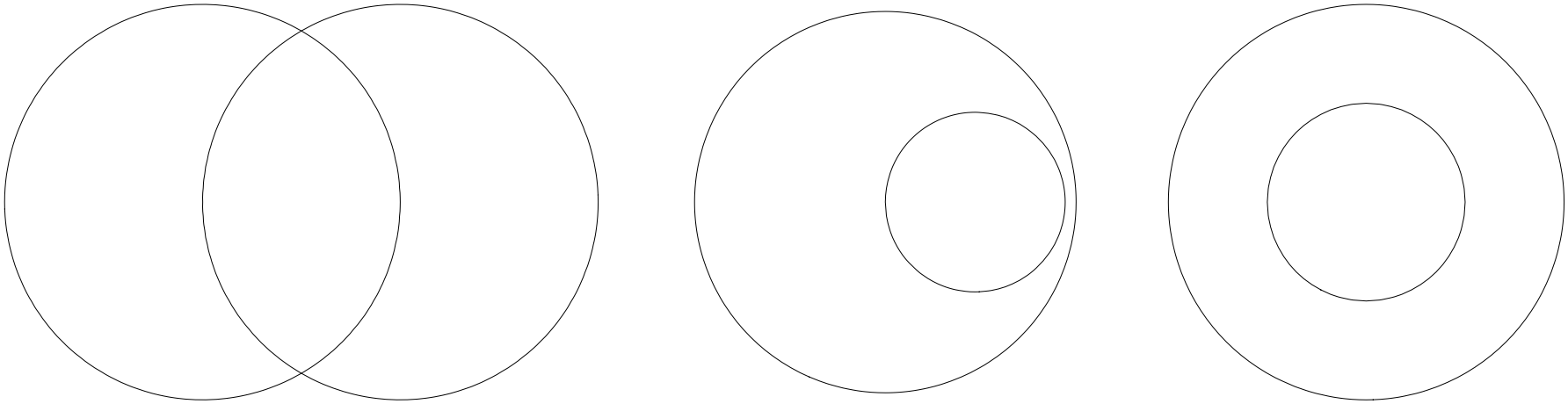
Dve stožnici se sekata v 4 točkah.



Kje so manjkajoča presečišča?

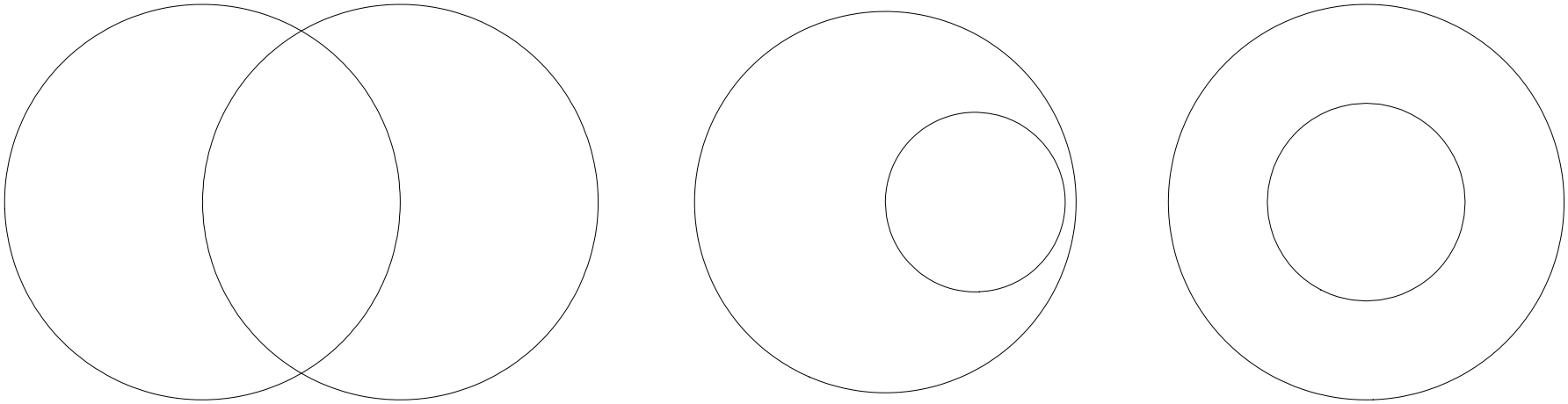


Kje so manjkajoča presečišča?



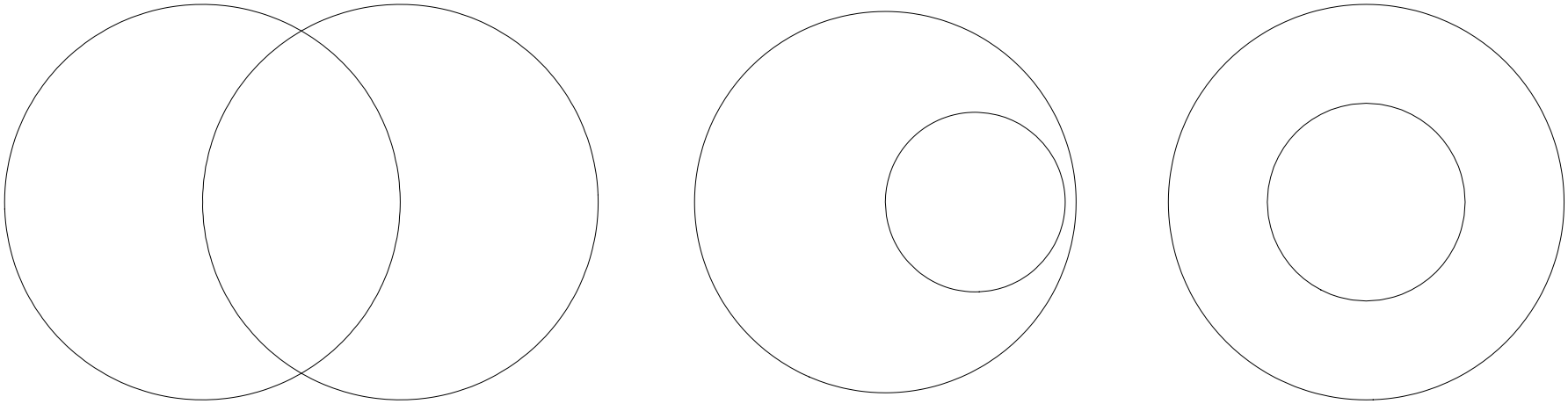
Vsaka krožnica poteka skozi točki $(1, i, 0)$ in $(1, -i, 0)$ v neskončnosti.

Kje so manjkajoča presečišča?



Vsaka krožnica poteka skozi točki $(1, i, 0)$ in $(1, -i, 0)$ v neskončnosti.Premici $y = ix$ in $y = -ix$ sta tangenti na vse krožnice $x^2 + y^2 = r^2$ v točkah $(1, i, 0)$ oziroma $(1, -i, 0)$, zato se v tretjem primeru krožnici v teh dveh točkah sekata z večkratnostjo 2.

Kje so manjkajoča presečišča?



Vsaka krožnica poteka skozi točki $(1, i, 0)$ in $(1, -i, 0)$ v neskončnosti.Premici $y = ix$ in $y = -ix$ sta tangenti na vse krožnice $x^2 + y^2 = r^2$ v točkah $(1, i, 0)$ oziroma $(1, -i, 0)$, zato se v tretjem primeru krožnici v teh dveh točkah sekata z večkratnostjo 2.

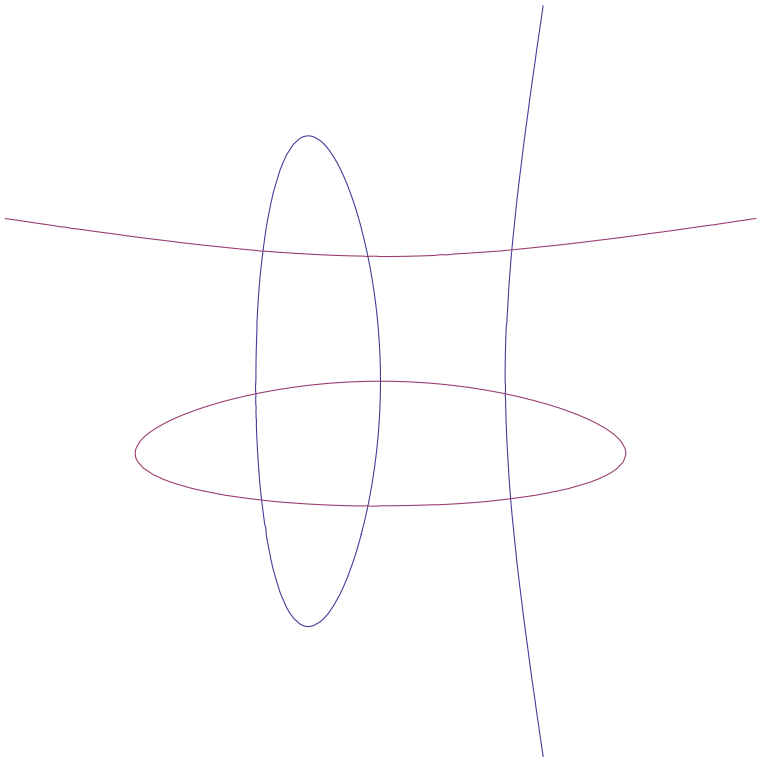
V drugem primeru se krožnici $(x-1)^2 + y^2 = 1$ in $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$ sekata še v kompleksnih točkah $(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}i)$ in $(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}i)$.

Primer II

Dve kubični krivulji se sekata v 9 točkah.

Primer II

Dve kubični krivulji se sekata v 9 točkah.



Posledica Bézoutovega izreka

Posledica

Naj bosta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ projektivni krivulji stopnje n in naj nm presečišč krivulj $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na neki nerazcepni krivulji $\mathcal{C}$ stopnje m za nek $m < n$. Potem preostalih $n(n-m)$ presečišč $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na neki krivulji stopnje največ $n-m$.

Posledica Bézoutovega izreka

Posledica

Naj bosta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ projektivni krivulji stopnje n in naj nm presečišč krivulj $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na neki nerazcepni krivulji $\mathcal{C}$ stopnje m za nek $m < n$. Potem preostalih $n(n-m)$ presečišč $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na neki krivulji stopnje največ $n-m$.

Ni treba, da je nm točk v preseku $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}$ različnih, dovolj jih je šteti z večkratnostmi, pri čemer mora biti v vsaki točki presečno število krivulj $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}$ enako presečnemu številu krivulj $\mathcal{C}_2$ in $\mathcal{C}$.

Bézout in Pascal

Kaj pravi prejšnja posledica v primeru $n = 3$, $m = 2$?

Bézout in Pascal

Kaj pravi prejšnja posledica v primeru $n = 3$, $m = 2$?

Posledica

Naj bosta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ kubični projektivni krivulji in naj 6 njunih presečišč leži na neki nerazcepni stožnici. Potem preostala 3 presečišča $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ ležijo na neki premici.

Bézout in Pascal

Kaj pravi prejšnja posledica v primeru $n = 3$, $m = 2$?

Posledica

Naj bosta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ kubični projektivni krivulji in naj 6 njunih presečišč leži na neki nerazcepni stožnici. Potem preostala 3 presečišča $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ ležijo na neki premici.

Poseben primer: $\mathcal{C}_1 = AB' \cup BC' \cup CA'$, $\mathcal{C}_2 = A'B \cup B'C \cup C'A$

Bézout in Pascal

Kaj pravi prejšnja posledica v primeru $n = 3$, $m = 2$?

Posledica

Naj bosta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ kubični projektivni krivulji in naj 6 njunih presečišč leži na neki nerazcepni stožnici. Potem preostala 3 presečišča $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ ležijo na neki premici.

Poseben primer: $\mathcal{C}_1 = AB' \cup BC' \cup CA'$, $\mathcal{C}_2 = A'B \cup B'C \cup C'A$

Naj bodo A, B, C, A', B', C' točke ne neki stožnici. Potem presečišča $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ in $BC' \cap B'C$ ležijo na isti premici.

Bézout in Pascal

Kaj pravi prejšnja posledica v primeru $n = 3$, $m = 2$?

Posledica

Naj bosta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ kubični projektivni krivulji in naj 6 njunih presečišč leži na neki nerazcepni stožnici. Potem preostala 3 presečišča $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ ležijo na neki premici.

Poseben primer: $\mathcal{C}_1 = AB' \cup BC' \cup CA'$, $\mathcal{C}_2 = A'B \cup B'C \cup C'A$

Naj bodo A, B, C, A', B', C' točke ne neki stožnici. Potem presečišča $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ in $BC' \cap B'C$ ležijo na isti premici.

To je Pascalov izrek.

Pascalov izrek za degenerirane šestkotnike

Zadnja posledica je veljala tudi v primeru manj kot 6 točk, če je presečno število v kakšni točki 2.

Pascalov izrek za degenerirane šestkotnike

Zadnja posledica je veljala tudi v primeru manj kot 6 točk, če je presečno število v kakšni točki 2.

Posledica (5 točk)

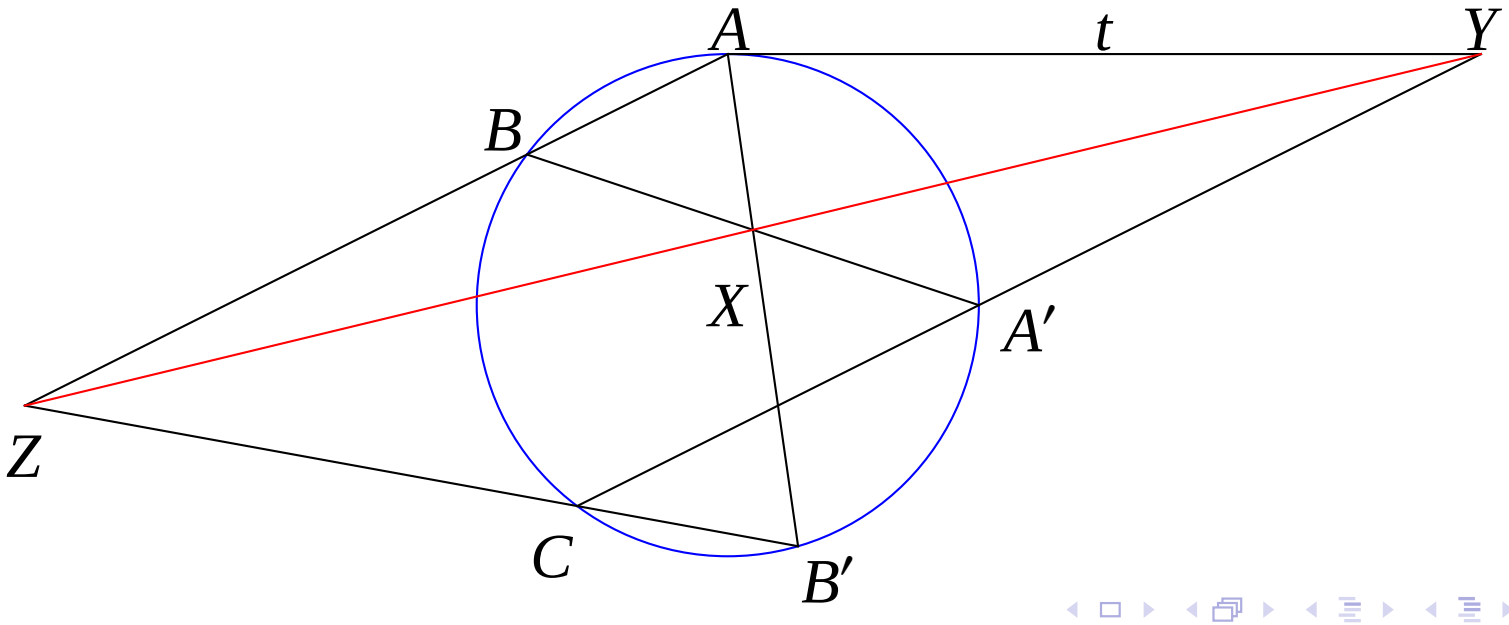
Naj bodo A, B, C, A', B' točke na neki stožnici in t tangenta na stožnico v točki A. Potem presečišča $AB' \cap A'B$, $t \cap A'C$ in $AB \cap B'C$ ležijo na isti premici.

Pascalov izrek za degenerirane šestkotnike

Zadnja posledica je veljala tudi v primeru manj kot 6 točk, če je presečno število v kakšni točki 2.

Posledica (5 točk)

Naj bodo A, B, C, A', B' točke na neki stožnici in t tangenta na stožnico v točki A. Potem presečišča $AB' \cap A'B$, $t \cap A'C$ in $AB \cap B'C$ ležijo na isti premici.



Pascalov izrek za degenerirane šestkotnike II

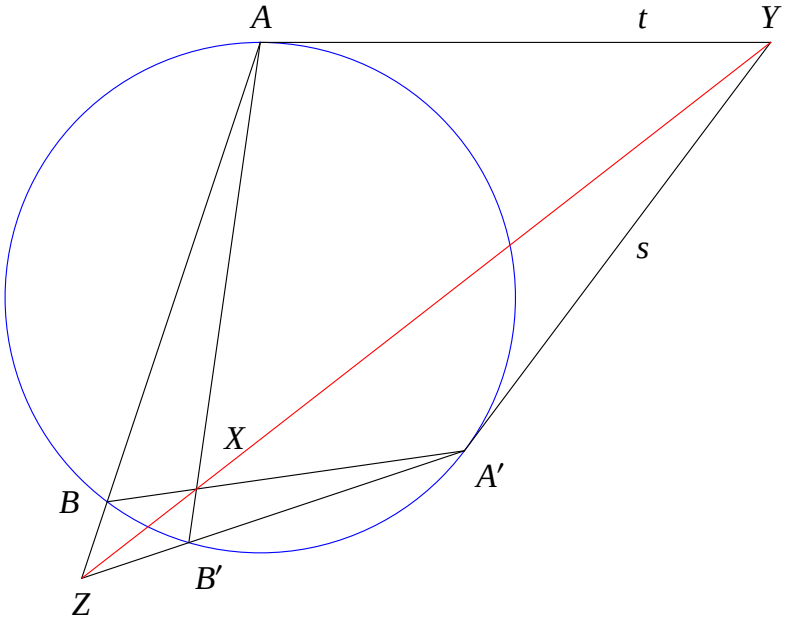
Posledica (4 točke)

Naj bodo A, B, A', B' točke na neki stožnici, t tangenta na stožnico v točki A in s tangenta na stožnico v točki A'. Potem presečišča $AB \cap A'B'$, $AB' \cap A'B$ in $t \cap s$ ležijo na isti premici.

Pascalov izrek za degenerirane šestkotnike II

Posledica (4 točke)

Naj bodo A, B, A', B' točke na neki stožnici, t tangenta na stožnico v točki A in s tangenta na stožnico v točki A'. Potem presečišča $AB \cap A'B'$, $AB' \cap A'B$ in $t \cap s$ ležijo na isti premici.



Pascalov izrek za degenerirane šestkotnike III

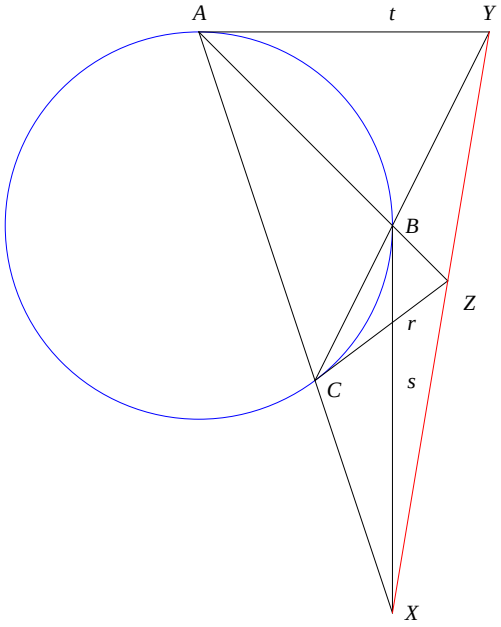
Posledica (3 točke)

Naj bodo A, B, C točke na neki stožnici, t tangenta na stožnico v točki A, s tangenta na stožnico v točki B in r tangenta na stožnico v točki C. Potem presečišča $AB \cap r$, $AC \cap s$ in $BC \cap t$ ležijo na isti premici.

Pascalov izrek za degenerirane šestkotnike III

Posledica (3 točke)

Naj bodo A, B, C točke na neki stožnici, t tangenta na stožnico v točki A, s tangenta na stožnico v točki B in r tangenta na stožnico v točki C. Potem presečišča $AB \cap r$, $AC \cap s$ in $BC \cap t$ ležijo na isti premici.



Obrat Pascalovega izreka

Posledico Bézoutovega izreka uporabimo v primeru $n = 3$ in $m = 1$:

Obrat Pascalovega izreka

Posledico Bézoutovega izreka uporabimo v primeru $n = 3$ in $m = 1$:

Posledica

Naj bosta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ kubični projektivni krivulji in naj 3 njuna presečišča ležijo na neki premici. Potem preostalih 6 presečišč $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na neki stožnici (ki je morda razcepna).

Obrat Pascalovega izreka II

Če je $\mathcal{C}_1 = AB' \cup BC' \cup CA'$ in $\mathcal{C}_2 = A'B \cup B'C \cup C'A$, dobimo obrat Pascalovega izreka:

Obrat Pascalovega izreka II

Če je $\mathcal{C}_1 = AB' \cup BC' \cup CA'$ in $\mathcal{C}_2 = A'B \cup B'C \cup C'A$, dobimo obrat Pascalovega izreka:

Posledica (Braikenridge, Maclaurin)

Naj bodo A, B, C, A', B', C' take točke, da točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ ležijo na isti premici. Potem A, B, C, A', B', C' ležijo na isti stožnici.

Obrat Pascalovega izreka II

Če je $\mathcal{C}_1 = AB' \cup BC' \cup CA'$ in $\mathcal{C}_2 = A'B \cup B'C \cup C'A$, dobimo obrat Pascalovega izreka:

Posledica (Braikenridge, Maclaurin)

Naj bodo A, B, C, A', B', C' take točke, da točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ ležijo na isti premici. Potem A, B, C, A', B', C' ležijo na isti stožnici.

Posledica Braikenridge-Maclaurinovega izreka je Papusov izrek.

Podobne konstrukcije

Iz posledice Bézoutovega izreka sledi:

Posledica

Naj točke A, B, C, D, E, F ležijo na isti stožnici in naj bo $\mathcal{C}_1$ neka stožnica skozi A, B, C, D, $\mathcal{C}_2$ pa neka stožnica skozi A, B, E, F. Potem presečišči stožnic $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$, ki sta različni od A in B, ter presečišče premic CD in EF ležijo na isti premici.

Podobne konstrukcije II

Iz posledice Bézoutovega izreka za $n = 4$ in $m = 2$ sledi:

Posledica

Naj 8 točk iz preseka krivulj 4. stopnje $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na isti stožnici. Potem tudi preostalih 8 presečišč krivulj $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na isti stožnici.

Podobne konstrukcije II

Iz posledice Bézoutovega izreka za $n = 4$ in $m = 2$ sledi:

Posledica

Naj 8 točk iz preseka krivulj 4. stopnje $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na isti stožnici. Potem tudi preostalih 8 presečišč krivulj $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ leži na isti stožnici.

Posledica

Naj bodo A, B, C, D, E, F, G, H točke na stožnici. Potem preostalih 8 presečišč vsake od premic AB, CD, EF, GH z vsako od premic BC, DE, FG, HA tudi leži na isti stožnici.

Cayley-Bacharachov izrek

Izrek (Cayley, Bacharach)

Če se dve kubični krivulji sekata v devetih točkah in tretja kubična krivulja poteka skozi 8 izmed devetih presečišč, poteka tudi skozi deveto.

Cayley-Bacharachov izrek

Izrek (Cayley, Bacharach)

Če se dve kubični krivulji sekata v devetih točkah in tretja kubična krivulja poteka skozi 8 izmed devetih presečišč, poteka tudi skozi deveto.

Pascalov in Papusov izrek oba sledita iz Cayley-Bacharachovega.